UNIVERSIDAD DE SANTO DOMINGO

CURSO DE FORMACION ESTADISTICA DEL CARIBE

APUNTES DE MATEMATICAS PARA ESTADISTICA

Correspondientes al Curso dictado por el
Prof. Enrique Dieulefait

Ciudad Trujillo, D. N.
1958

P R O L O G O

Presentamos en estos Apuntes la compilación de las lecciones que a lo largo del año fueron distribuídas entre los Alumnos del Curso como material complementario, para ampliar y ordenar los temas desarrollados en clase.

Queremos destacar el carácter complementario y no sustitutivo de estos Apuntes respecto a la labor docente desarrollada, la que ampliada con los correspondientes trabajos prácticos y de laboratorio, no incluídos en estas páginas, constituye la guía necesaria para su mejor entendimiento. No se pretende en estas líneas tratar un campo tan vasto como el que nos ocupa en este Curso, con el rigor y la dedicación que dichos puntos merecen, cosa que se deberá buscar en una obra sobre la materia y no en una colección de apuntes hechos para satisfacer las necesidades de momento. Se ha buscado, eso si, lograr una unidad y una exposición clara, para guiar al estudiante a través de temas tan diversos dentro de una misma asignatura como los que comprende el programa desarrollado. En aras de esa misma unidad y olvidando muchas veces, de propósito, el rigor matemático de muchas consideraciones, se buscó satisfacer las necesidades divergentes de tiempo y programa a desarrollar apelando a consideraciones intuitivas y proporcionando en muchos casos, una guía de operatoria a fin de poder resolver de momento, problemas de cálculo que requerirían de por si un curso especializado.

Atendiendo a las necesidades del progfama a desarrollar y los conocimientos del material humano, se encaró la materia en tres partes, cuyo contenido esbozamos a continuación.

Parte primera. En donde se atiende a los temas propios del Curso de nivelación de conocimientos; con un repaso general de la operatoria artimética elemental, estudio de tablas numéricas y teoría y práctica de los distintos sistemas de logaritmos.

Parte segunda. Se tratan en ésta, ordenadamente, conforme a las necesidades de las demás asignaturas, temas de análisis que comprenden tópicos sobre geometría, análisis combinatorio, potencias de polinomios, sistemas de ecuaciones, determinantes, trigonometría, números complejos y ecuaciones de segundo grado.

Parte tercera. Se introduce en ésta la noción de límite y se presentan temas de cálculo; comprendiendo los tópicos desarrollados el estudio de las progresiones, límites y series; temas de geometría analítica, de cálculo diferencial e integral.

Quiero agradecer en estas líneas la labor de trans - cripción y corrección de estas notas realizadas por los señores Henry García y Dr. Sucre R. Rodriguez R. respectivamente.

Enrique Dieulefait

Ciudad Trujillo, R.D.
diciembre de 1958

I N D I C E

Págs.

III PARTE

Una definición de la aritmética la ubica como la - ciencia que estudia las propiedades de los números, ya sea en su expresión corriente o decimal, como por medio de notaciones que emplean los caracteres del abecedario latino o del alfabeto griego.

De la simbología aritmética conocemos:

i) Los números arábigos o dígitos: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

ii) Los símbolos fundamentales de operatoria:

Símbolo de suma: $+$

Símbolo de resta: $-$

Símbolo de multiplicación: $\times$

iii) Los símbolos de igualdad y orden

Símbolo de igualdad: $=$

Símbolo de menor que: $<$

iv) Los símbolos de agrupamiento

Paréntesis ( )

Corchetes [ ]

Llaves { }

Otros símbolos matemáticos habrán de introducirse conforme las necesidades de la materia lo requieran.

Fundamentalmente admitiremos dos categorías de números:

a) Números reales

b) números imaginarios.

La clase de los números reales admite ser subdividida en distintas subclases conforme al siguiente esquema.

$$
\text{Reales}\begin{cases}\text{Racionales}\begin{cases}\text{Enteros}\begin{cases}\text{Naturales}\\ \text{Negativos}\end{cases}\\ \text{Fraccionarios}\end{cases}\\ \text{Irracionales}\end{cases}
$$

La clase de los números reales admite una representación espacial, correspondiendo a cada número real un punto de una recta, siendo ésta el espacio puntual o recta de referencia.

Se llega a la clase de los números reales por sucesivas ampliaciones de la clase de los números naturales, que surgen de la necesidad de contar. Dentro de la clase de los números naturales son posibles las operaciones de suma y de multiplicación, ya que siempre se tendrá como resultado un nuevo número natural. Con la operación de resta surge la necesidad de ampliar el concepto de número, incorporando los enteros negativos. Nace así la clase de los números enteros, dentro de la cual tienen sentido lógico las operaciones de suma, resta y multiplicación de números. El cociente o división de dos números enteros crea la necesidad de ampliar el concepto de número, incorporando la clase de los números fraccionarios. Con este nuevo agregado se tiene la clase de los números racionales, dentro de la cual tienen sentido las operaciones de suma, resta, multiplicación y división.

La operación de radicación crea la necesidad de ampliar esta clase dando categoría de número a los irracionales. Incorporando a la clase de los números racionales esta nueva clase de números se llega a la clase de los números reales, que comprende como casos particulares a las que mencionáramos anteriormente.

<u>NUMEROS ENTEROS</u>. <u>DEFINICIONES</u>.

1.- Denominamos Factor o Divisor de un número entero a cualquier número entero que lo divida exactamente. Asi por ejemplo 7 es divisor de 21 ya que $21 \div 7 = 3$.

2.- Llamamos números par a aquel que puede ser exactamente dividido por 2. Asi serán números pares: 2, 4, 6, 8, ... (2 n), ... en donde n es un entero cualquiera.

3.- Llamamos números impar a aquel entero que no admite como divisor al número 2. Así, 1, 3, 5, ... (2 n-1)... en donde n es un entero cualquiera, son números impares.

4.- Llamamos números primos a aquellos que no admiten otro divisor que la unidad y el mismo número considerado. Así: 1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, ..., son números primos.

5.- Llamamos número compuesto a aquel que admite otros divisores además de si mismo y la unidad. Asi 6, 8, 9, 10, 15, ..., son números compuestos.

6.- Llamamos factor común o divisor común de dos números a un número entero que divide exactamente a ambos. Al mayor de todos los divisores comunes de un par de números lo llamamos Máximo Común Divisor (M.C.D.). Así por ejemplo, 4 y 8 son divisores comunes de 16 y 24, siendo 8 el M.C.D.

7.- Múltiplo de un número es otro que es exactamente divisible por el primero, es decir, lo tiene como factor. Si un número es exactamente divisible por dos números enteros, se lo llama común multiplo de estos dos. El menor de todos los múltiplos comunes a un par de números recibe el nombre de Mínimo Común Múltiplo (m.c.m.). Así, por ejemplo, 72 y 36 son múltiplos de 12 y 9, pero sólo 36 es el m.c.m.

8.- REGLAS PARA HALLAR LOS DIVISORES DE UN NUMERO.

a) Un número es divisible por 2 cuando su última cifra es cero o múltiplo de 2.

b) Un número es divisible por 3 cuando la suma de los digitos que lo forman es múltiplo de 3. Por ejemplo: el número 75825 es divisible por 3 ya que se cumple: $7+5+8+2+5 = 27$. Efectivamente $75825 \div 3 = 25275$.

c) Un número es divisible por 4 cuando sus 2 últimas cifras son ceros o múltiplos de 4. Por ejemplo el número 5372 es divisible por 4 ya que el número formado por sus dos últimas cifras, 72 es divisible por cuatro.

d) Un número es divisible por 5 cuando su última cifra es cero o cinco.

e) Un número es divisible por 6 cuando además de ser par, la suma de sus cifras es múltiplo de 3. Por ejemplo: el número 7938 es divisible por 6 ya que: i) es par; y ii) la suma de sus cifras, $7+9+3+8 = 27$, es múltiplo de 3.

f) Un número es divisible por 8 cuando sus últimas tres cifras son múltiplo de ocho. Así por ejemplo, el número 3552 es múltiplo de 8 ya que sus tres últimas cifras, 552 forman un número que es múltiplo de ocho.

g) Un número es divisible por 9 cuando la suma de sus cifras es múltiplo de nueve. Así por ejemplo el número 2178 es divisible por 9 ya que $2+1+7+8 = 18$, que es múltiplo de 9.

9) <u>PROCEDIMIENTO A SEGUIR PARA DESCOMPONER UN NUMERO EN LOS FACTORES QUE LO FORMAN</u>.

Recordando las anteriores reglas de divisibilidad numérica se está en condiciones de determinar si un número dado es divisible por 2, por 3 etc.

Si el número en cuestión es divisible por 2, éste será uno de sus factores. Efectuando la operación de división, se tendrá un cociente entero.

Analizando este cociente entero respecto a los factores que lo forman y dividiendo dicho cociente por el menor de sus factores primos, se llegará a un nuevo cociente entero.

Procediendo repetidamente de esta forma, hallaremos los factores primos que componen nuestro número en cuestión.

Una disposición recomendable para hallar numéricamente los factores de un número es la siguiente:

Consideremos el número 780, del que deseamos determinar los factores primos que lo componen. Aplicando sucesivamente las reglas antes citadas, se escribirán en la fi la superior, los correspondientes divisores, mientras que en la fila inferior se irán colocando los cocientes enteros de las sucesivas divisiones

Factores	2	2	3	5	13
780	390	195	65	13	1

Resultará en consecuencia $780 = 2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 13$

Consideremos el número 6480. Sus factores primos serán:

Factores	2	2	2	2	2	2	3	5	7
6720	3360	1680	840	420	210	105	35	7	1

$$6720 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 7$$

Es conveniente, cuando como en este caso uno de los factores aparece repetidas veces, introducir la notación de potencias. Como sabemos $2 \quad 2 \quad 2 \quad 2 \quad 2 \quad 2 = 2^6$ resulta:

$$6480 = 2^6 \quad 3 \quad 5 \quad 7$$

10.- MAXIMO COMUN DIVISOR. (M.C.D.)

Factor o divisor común de un grupo de números es otro número que divide exactamente a todos los del grupo considerado. Así por ejemplo, 4 y 8 son divisores comunes de 16 y de 24. Al mayor de todos los divisores comunes a un grupo de números lo llamamos Máximo Común Divisor (M.C.D.) de ese grupo de números. Se tiene así que 8 es el M.C.D. de 16 y 24.

Calculo del M.C.D. de un Grupo de Números.

Se determinan primero los factores de cada uno de estos números, luego se considerar todos los factores primos comunes a los mismos, resultando el M.C.D igual al producto de dichos factores primos.

Cálculo del M.C.D. de los números: 9, 27, 144

	3	3
9	3	1

$9 = 3^2$

	3	3	3
27	9	3	1

$27 = 3^3$

	2	2	2	2	3	3
144	72	36	18	9	3	1

$$144 = 2^4 \times 3^2$$

El MCD pedido es: $3^2 = 9$

11.- MINIMO COMUN MULTIPLO (MCM)

Múltiplo de un número es otro que resulta exactamente divisible por el primero. Múltiplo común a un par de números será otro que es exactamente divisible por los números dados. Así, 72 y 36 son múltiplos de 12 y 9.

Al menor de todos los múltiplos comunes a un grupo de números lo llamamos mínimo común múltiplo de estos números (MCM). En el caso anterior, el MCM de 12 y 9 es 36.

CALCULO DEL MCM DE UN GRUPO DE NUMEROS

Se determinan primero los factores de cada uno de estos números. Luego se consideran todos los factores primos, comunes y no comunes en su mayor exponente, estando dado el MCM por el producto de estos factores.

Sean por ejemplo los números 12, 15, 18 y 24. Para calcular el M.C.M. de los mismos comenzamos descomponiéndolos en el producto de sus factores primos:

	2	2	3
12	6	3	1

$12 = 2 \times 2 \times 3$

	3	5
15	5	1

$15 = 3 \times 5$

	2	3	3
18	9	3	1

$18 = 2 \times 3 \times 3$

	2	2	2	3
24	12	6	3	1

$24 = 2 \times 2 \times 2 \times 3$

Los factores comunes y no comunes en su mayor expresión son: 2, 2, 2, 3, 3, 5, siendo su producto: $2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 = 360$, el M.C.M. pedido.

12.- <u>IMPORTANCIA RELATIVA DE LOS SIMBOLOS DE OPERACION</u>.

a) Una serie de sumas: $2+5+27+3 = 37$, puede efectuarse en cualquier orden. Se dirá que el orden de los términos de una suma no influye en el resultado final.

b) Una serie de sustracciones: $86 - 25 - 13 - 2 = 46$, debe efectuarse en el orden natural de lectura, es decir de izquierda a derecha.

c) En una suma algebraica: $2+5-7+28+8-17 = 19$, las sumas y restas se deben efectuar siguiendo el orden lógico de lectura, es decir de izquierda a derecha.

Cuando se opera con sumas algebraicas, y a fin de lograr una mayor comodidad para efectuar las operaciones, se pueden agrupar los términos positivos por una parte, y los negativos por otra, sumando cada uno de estos grupos y calculando la diferencia entre estos dos valores finales. La mencionada agrupación para la suma anterior la efectuamos, mediante paréntesis, de la siguiente manera:

$$(2+5+28+8) - (7+17) = 43 - 24 = 19$$

d) Una serie de multiplicaciones $2 \times 3 \times 5 \times 6 = 180$ puede efectuarse en cualquier orden:

e) Una serie de divisiones $50 \div 25 \div 2 = 1$ debe efectuarse siguiendo el orden de lectura, es decir de izquierda a derecha.

f) Cuando en una expresión aparecen diferentes operaciones, es decir se deben realizar sumas, restas, multiplicaciones y divisiones, el orden de prioridad con que se -

efectuarán las mismas será: 1) multiplicaciones, 2) divisiones, 3) sumas y restas en el orden en que aparecen. Dicho en otras palabras se operará término a término, respetando dentro de cada uno de éstos, las reglas dadas para las multiplicaciones y divisiones.

g) OBSERVACION: Se denominan términos de una expresión a las cantidades ubicadas entre signos más o menos. En la siguiente expresión

$$6\ x^2 + 2 \div 5 + 36\ x = 2$$

se observan tres términos: $6\ x^2$; $2 \div 5$; $36\ x$.

13.- <u>EMPLEO DE PARENTESIS CORCHETES Y LLAVES</u>.

Estos símbolos de agrupación se emplean para quebrar los órdenes de prioridad enunciados anteriormente, así como para agrupar términos de una expresión.

Si se considera por ejemplo la expresión

$$3\ a + 25\ a\ b + 12\ a\ c + c$$

se observa que en los tres primeros términos de la misma figura repetido el factor a . Es decir, a es un factor común a los tres primeros términos de esa expresión. Se podrá en tal caso proceder a factorear la misma, operación ésta, que consiste en separar de la misma los elementos comunes a varios términos, indicando el producto entre este factor común y la suma de los coeficientes con que aparecía.

Se tendrá así:

$$3\ a + 25\ a\ b + 12\ a\ c + c = a\ (3 + 25\ b + 12\ c) + c$$

Lo que se ha hecho en este caso es agrupar los términos que tienen el factor común a . La utilización del paréntesis quiebra la regla enunciada anteriormente, ya que al incorporarlo indica que se debe efectuar la multiplicación luego de haber realizado las sumas que figuran dentro del mismo. La aplicación de la propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la suma, permite distribuir la multiplicación indicada, restituyendo así la expresión anterior.

Si se tienen paréntesis precedidos por el signo + o el signo - , se deberán considerar las expresiones dentro de los mismos como términos, operando en consecuencia. Para quitar un paréntesis precedido por signos + o - notaremos los siguientes casos:

i) Paréntesis precedidos por signo + , se quitan sin alterar los signos de los términos interiores a los mismos.

ii) Paréntesis precedidos por signo - , se quitan invirtiendo los signos de los términos interiores a los mismos

EJEMPLO:

i) $3x + (2 - 3x + 12 + 5x) =$

$= 3x + 2 - 3x + 12 + 5x =$

Sacando x factor común

$= x(3 - 3 + 5) + (2 + 12) =$

$= 5x + 14$

ii) $2x - (3 + 2x + 5 - 3x) =$

$= 2x - 3 - 2x - 5 + 3x =$

$= x(2 - 2 + 3) - (3 + 5) =$

$= 3x + 2$

En este segundo ejercicio hemos agrupado dentro de un paréntesis precedido por el signo - a los términos -3 y -5, para lo cual les hemos alterado el signo. Se opera en consecuencia según una de las dos siguientes reglas.

i) Para introducir dentro de un paréntesis precedido por el signo + , distintos términos de una expresión, se respetan los signos originales de los mismos.

ii) Para introducir dentro de un paréntesis precedi do por el signo - , los distintos términos de una expresión, se alterarán los signos originales de los mismos.

14.- CANCELACION DE TERMINOS EN UNA EXPRESION.

Cuando en una expresión aparecen con distinto signo, términos de igual valor, se procederá a cancelar los mismos. Por ejemplo en la expresión:

$$12 + 3\,a - 5 + 16 - 3\,a + 2\,a =$$

$$= 12 + 3\,a - 5 + 16 - 3\,a + 2\,a =$$

$$= 12 \quad - \quad 5 + 16 + 2\,a$$

15.- SIMPLIFICACION DE FACTORES EN UNA EXPRESION.

Cuando tanto en el numerador como en el denominador de una fracción aparezcan factores comunes, se los puede simplificar; operación ésta que consiste en eliminarlos simultaneamente del numerador y denominador de dicha fracción. La propiedad aritmética que permite tal operación de simplificación es aquella que dice que una fracción no altera si se divide simultaneamente numerador y denominador por una misma cantidad.

Por ejemplo en la expresión:

$$\frac{5\,\cancel{a}\,b}{\cancel{a}} = 5\,b$$

Esta operación puede ampliarse descomponiendo los factores, tanto del numerador como del denominador, en sus divisores primos. Por ejemplo en la expresión:

$$\frac{25 \,.\, a^3 \,.\, b^2}{30 \,.\, b \,.\, a^2} = \frac{\cancel{5} \,.\, 5 \,.\, \cancel{a} \,.\, \cancel{a} \,.\, a \,.\, \cancel{b} \,.\, b}{2 \,.\, 3 \,.\, \cancel{5} \,.\, \cancel{b} \,.\, \cancel{a} \,.\, \cancel{a}} = \frac{5 \,.\, b}{3 \,.\, 2} = \frac{5b}{6}$$

Observación.

En la práctica nunca se llega a descomponer numeray denominador en sus factores primos, operándose según los criterios de divisibilidad numérica aplicados simultáneamente al numerador y al denominador. Resultará así:

$$\frac{\overset{5}{\cancel{25}} \cdot a^{\cancel{3}} \cdot b^{2}}{\underset{6}{\cancel{30}} \cdot \cancel{b} \cdot \cancel{a}^{2}} = \frac{5\ b}{6}$$

16.- <u>MIEMBROS DE UNA IGUALDAD</u>.

Denominamos primer y segundo miembro de una igualdad a las expresiones que aparecen respectivamente a izquierda y derecha del signo igual.

i) Interesa a los fines de la operatoria pasar términos de un miembro a otro de una igualdad. Para efectuar esta operación, que consiste en quitar un término de un miembro, para incorporarlo al otro, se le cambia el signo que presenta. Así por ejemplo, en la expresión

$$3\,x + 2\,y = 5$$

si se quiere pasar el segundo término del primer miembro al segundo miembro, se tendrá:

$$3\,x = 5 - 2\,y$$

ii) Cuando en un miembro de una igualdad figure un solo término, es decir existan en el mismo tan solo factores, se podrá pasar algunos de ellos al otro miembro. Para ésto debe respetarse la regla que dice:

i) Una cantidad que en un miembro figure como factor pasa al otro como divisor.

ii) Una cantidad que en un miembro figure como divisor pasa al otro miembro como factor.

Así por ejemplo, si en la expresión:

$$2\,a\,b = 5 + 2\,a$$

se quieren pasar al segundo miembro los factores $2\,a$ se tendrá:

$$b = \frac{5 + 2a}{2a}$$

17.- OPERACIONES CON NUMEROS FRACCIONARIOS.

1.- Suma de dos números fraccionarios.

a) Cuando se trate de sumar dos números fraccionarios de igual denominador, por ejemplo, $\frac{3}{5}$ y $\frac{2}{5}$, se formará un nuevo número fraccionario, de igual denominador y cuyo numerador sea igual a la suma de los numeradores. Así se tendrá para el caso anterior:

$$\frac{3}{5} + \frac{2}{5} = \frac{3+2}{5} = \frac{5}{5} = 1$$

Si se tuvieran dos números fraccionarios de igual denominador, pero expresados en forma literal, se procederá de igual manera, por ejemplo:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}$$

Si en lugar de considerar la suma de dos números fraccionarios, se quiera calcular la diferencia entre los mismos, se procederá en forma acorde. Así, por ejemplo:

$$\frac{4}{3} - \frac{2}{3} = \frac{4-2}{3} = \frac{2}{3}$$

b) Cuando se trate de sumar dos números fraccionarios de distinto denominador aplicaremos la siguiente regla: La suma de dos números fraccionarios de distinto denominador es igual a otro número fraccionario, cuyo denominador es igual al producto de los denominadores, y cuyo numerador es igual al producto del numerador del primer fraccionario por el denominador del segundo, más el producto del numerador del segundo por el denominador del primero.

Así, por ejemplo, si se trata de sumar $\frac{6}{5}$ y $\frac{2}{6}$ se procederá de la siguiente manera.

$$\frac{6}{5} + \frac{2}{6} = \frac{6 \times 6 + 2 \times 5}{5 \times 6} = \frac{36 + 10}{30} = \frac{46}{30}$$

Si los dos números fraccionarios estuvieran expresados en forma literal resultará, por ejemplo:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a\,d + b\,c}{b\,d}$$

Correspondiendo para el caso de tratarse de una diferencia entre números fraccionarios la siguiente disposición:

$$\frac{12}{7} - \frac{3}{5} = \frac{12 \times 5 - 3 \times 7}{7\ \ 5} = \frac{60 - 21}{35} = \frac{39}{35}$$

2.- <u>Suma de varios números fraccionarios</u>.

a) En el caso de tener que realizar la operación de sumar (siempre en forma algebraica, considerando términos tanto positivos como negativos) varios números fraccionarios, se puede aplicar una generalización de la regla anterior.

La suma de varios números fraccionarios es igual a un nuevo número fraccionario, cuyo denominador es igual al producto de los denominadores y cuyo numerador se obtiene sumando los productos de multiplicar el numerador de cada uno de los quebrados por los denominadores de los restantes. Así se tendrá como consecuencia de la aplicación de la presente regla, y para el caso de tres números fraccionarios:

$$\frac{3}{5} + \frac{2}{7} - \frac{1}{3} = \frac{3 \times 7 \times 3 + 2 \times 5 \times 3 - 1 \times 5 \times 7}{5\ \ 7\ \ 3} =$$

$$= \frac{63 + 30 - 35}{105} = \frac{58}{105}$$

b) Otra forma de efectuar la suma de varios números fraccionarios consiste en hallar primeramente el mínimo común denominador de todas las fracciones, (se comprende que este mínimo común denominador de todas las fracciones ha de ser el mínimo común múltiplo de las cantidades que figuran como denominador.).

Se dirá entonces que la suma de varios números fraccionarios es igual a otro número fraccionario cuyo denominador es el mínimo común denominador (m.c.d.) y cuyo numerador es igual a la suma de los productos que se obtienen multiplicando cada numerador por el cociente de dividir el m.c.d por el denominador correspondiente.

EJEMPLO:

Sumar los siguientes números fraccionarios: $\frac{6}{18}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{-1}{9}$ (efectuando la descomposición en factores primos de estos tres denominadores, ver No. 9 de estos mismos apuntes, se encuentra que el m.c.d., igual al m.c.d. de dichos números, es igual a 36), se tendrá operando consecuentemente con la regla enunciada más arriba:

$$\frac{6}{18}+\frac{2}{3}-\frac{1}{9} = \frac{6\times 2+2\times 12-1\times 4}{36} = \frac{12+24-4}{36} =$$

$$= \frac{32}{36}$$

18.- MULTIPLICACION DE NUMEROS FRACCIONARIOS.

a) Para multiplicar un número fraccionario por un entero, se forma un nuevo número fraccionario cuyo numerador sea igual al producto del entero por el numerador del fraccionario dado, y cuyo denominador sea igual al denominador del fraccionario dado.

Ejemplo: $\frac{2}{3}\times 3 = \frac{2\times 3}{3} = \frac{6}{3}$

$$\frac{a}{b}\times c = \frac{a\times c}{b}$$

b) Para multiplicar un número fraccionario por otro número fraccionario, se forma un tercer número fraccionario que tenga por numerador el producto de los numeradores y por denominador el producto de los denominadores. Por ejemplo:

$$\frac{2}{3} \times \frac{3}{7} = \frac{2 \times 3}{3 \times 7} = \frac{6}{21}$$

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}$$

c) Para multiplicar varios números fraccionarios entre sí, se operará de idéntica manera, multiplicando todos los numeradores entre sí, y todos los denominadores entre sí; considerando esos productos respectivamente como numerador y denominador del resultado.

Así se tendrá por ejemplo:

$$\frac{2}{3} \times \frac{5}{7} \times \frac{12}{3} \times \frac{5}{11} = \frac{2 \times 5 \times 12 \times 5}{3 \times 7 \times 3 \times 11} = \frac{600}{693}$$

19.- DIVISION DE NUMEROS FRACCIONARIOS.

a) Para dividir un número fraccionario por un entero, se forma un nuevo número fraccionario que tenga por numerador el numerador del fraccionario dado. y que tenga por denominador el producto del denominador del fraccionario dado multiplicado por el entero en cuestión.

Así por ejemplo:

$$\frac{2}{5} \div 3 = \frac{2}{5 \times 3} = \frac{2}{15}$$

$$\frac{a}{b} \div c = \frac{a}{b\ d}$$

b) Para dividir dos números fraccionarios entre sí, se forma un nuevo número fraccionario cuyo numerador sea igual al producto del numerador del dividendo por el denominador del divisor, y cuyo denominador sea igual al producto del numerador del divisor por el denominador del dividendo.

Otra forma de enunciar esta misma regla, y quizá más facil de retener, es la siguiente:

Para dividir un número fraccionario (dividendo) por otro número fraccionario (divisor) se invierte este último y se procede a multiplicar el dividendo por el divisor así transformado.

Por ejemplo:

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \times d}{b \times c}$$

En la práctica se operará siguiendo cualquiera de estas dos reglas, que por otra parte conducen como es natural a un mismo resultado, pero se omitirá en el caso de invocarse la segunda regla, el paso intermedio que supone el multiplicar por la recíproca del divisor, es decir se escribirá tan solo

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a \times d}{b \times c}$$

c) Si uno de los números que entran en la división (ya sea el dividendo o el divisor) fuera entero y dificultara la aplicación de la regla el hecho de que carece de denominador escrito, será factible expresarlo en forma de quebrado con numerador igual al número y con denominador igual a la unidad. De esta forma se podrán evitar equivocaciones en la aplicación de las reglas dadas hasta adquirir una pericia suficiente como para obviar estas primeras dificultades.

20.- <u>POTENCIACION</u>

Cuando en un término de una expresión, se repita varias veces un mismo factor, se adoptará para su representación la notación de potencia. Así, por ejemplo

$$4 \times 4 \times 4 = 4^3 = 64$$

en donde 4 (<u>base</u> de la potencia) indica el factor que se repite, y 3 (<u>orden</u> de la potencia, o <u>exponente</u>) indica el número de veces que se repite la base como factor. El resultado numérico 64, recibe el nombre de <u>potencia</u>.

Con referencia a las propiedades fundamentales de la potenciación destacaremos las siguientes propiedades fundamentales:

i) la de ser distributiva respecto de la multiplicación y del cociente;

ii) la de no ser distributiva respecto de la suma y de la resta;

Como ejemplo de la primera propiedad se tiene

$(a . b)^c = a^c . b^c$; en este caso hemos distribuido la potencia que afectaba al paréntesis, respecto de cada uno de los factores del mismo.

$\left(\frac{a}{b}\right)^c = \frac{a^c}{b^c}$; en este caso hemos distribuido la potencia que afectaba el paréntesis, respecto del dividendo y divisor de la fracción indicada.

Por la segunda propiedad fundamental, en $(a + b)^c$, no se deberá distribuir la potencia. Para el desarrollo de dicha expresión, enunciaremos más adelante las reglas correspondientes a las potencias de polinomios.

a) Multiplicación de Potencias de Igual Base.

El resultado de la multiplicación de dos o más potencias de igual base es una nueva potencia de la misma base, cuyo exponente es igual a la suma de los exponentes de las potencias dadas.

Ejemplo: $a^3 . a^2 . a^5 = a^{3+2+5} = a^{10}$

Una justificación de esta regla resulta inmediata. De momento que con a^n designamos el producto de n factores iguales a a se tendrá:

$$a^n = a . a . a \overset{n}{\ldots} a$$

$$a^m = a . a . a \overset{m}{\ldots} a$$

$$a^n \cdot a^m = \overbrace{a \cdot a \cdot a \;\ldots}^{n} \;\; \overbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \;\ldots\; a}^{m}$$

$$a^n \cdot a^m = \overbrace{a \cdot a \cdot a \;\ldots\; a}^{n+m}$$

$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$, como queríamos demostrar

b) <u>DIVISION DE POTENCIAS DE IGUAL BASE</u>.

El resultado de la división entre dos potencias de una misma base es una nueva potencia de la misma base, cuyo exponente es igual al exponente del dividendo menos el exponente del divisor.

Ejemplo: $\dfrac{a^7}{a^4} = a^{7-4} = a^3$

<u>OBSERVACION.</u> Se deberá tener cuidado, al operar aplicando estas reglas, de considerar a la potencia primera de cualquier base como tal, ya que el hecho de que la misma no presente, por comodidad de escritura, exponente escrito podría dar lugar a confusiones.

Así por ejemplo:

$$a \cdot a^3 \cdot a^2 = a^{1+3+2} = a^6$$

c) <u>POTENCIAS DE EXPONENTE NEGATIVO</u>

Efectuemos por ejemplo la siguiente operación

$$\frac{a^4}{a^7} = \frac{\cancel{a} \cdot \cancel{a} \cdot \cancel{a} \cdot \cancel{a}}{\cancel{a} \cdot \cancel{a} \cdot \cancel{a} \cdot \cancel{a} \; a \; a \; a} = \frac{1}{a \cdot a \cdot a} = \frac{1}{a^3}$$

Si hubieramos aplicado la regla enunciada para el cociente de potencias de igual base, se habría obtenido:

$$\frac{a^4}{a^7} = a^{4-7} = a^{-3}$$

De la observación de estas dos igualdades se deduce la siguiente regla:

Una cantidad elevada a una potencia negativa es igual a la inversa de dicha cantidad elevada a potencia positiva.

$$a^{-b} = \frac{1}{a^{b}}$$

En nuestro ejemplo numérico anterior, se observa:

$$a^{-3} = \frac{1}{a^{3}}$$

La propiedad recíproca a la enunciada, también es cierta, observándose que:

$$a^{b} = \frac{1}{a^{-b}}$$

d) POTENCIAS DE EXPONENTE CERO

Como caso particular de la regla enunciada en "b", si se tiene

$$\frac{a^3}{a^3} = \frac{\cancel{a} \cdot \cancel{a} \cdot \cancel{a}}{\cancel{a} \cdot \cancel{a} \cdot \cancel{a}} = 1$$

será: $$\frac{a^3}{a^3} = a^{3-3} = a^{o}$$

En un caso más general se tendrá:

$$\frac{a^n}{a^n} = \frac{a \cdot a \cdot a \overbrace{\ldots}^{n} a}{a \cdot a \cdot a \overbrace{\ldots}^{n} a} = 1$$

$$\frac{a^n}{a^n} = a^{n-n} = a^o$$

De la observación de estas dos igualdades se desprende la siguiente <u>regla</u>:

La potencia cero de cualquier base es igual a la unidad.

e) <u>Potencia de potencia</u>

Consideremos el problema de efectuar la siguiente operación:

$$(a^n)^m$$

es decir calcular la potencia m-ésima de la potencia n-ésima de la base a . De acuerdo a la definición de potencia se tendrá:

$$(a^n)^m = \underbrace{a^n . a^n . a^n \ldots a^n}_{m}$$

es decir el producto de m factores iguales a a^n . Si al segundo miembro de la igualdad anterior aplicamos la regla de producto de potencias de igual base, enunciada en el párrafo a) , se tendrá:

$$(a^n)^m = \underbrace{a^n . a^n \ldots a^n}_{m} = a^{\overbrace{n+n+\ldots+n}^{m}} = a^{mn}$$

de donde se concluye la siguiente regla:

Para efectuar la potencia m-ésima de la potencia n-ésima de una cierta base, se forma una nueva potencia de la misma base, que tiene por exponente el producto de los exponentes dados.

Así por ejemplo:

$$(3^2)^4 = 3^{2 \times 4} = 3^8$$

$$(a^5)^3 = a^{5\times 3} = a^{15}$$

f) Signos de las potencias de base negativa.

Hasta ahora hemos considerado potencias de base positiva. Cuando se opere con potencias de base negativa, se deberá observar en lo que respecta al signo de las potencias, las siguientes reglas:

i) Una potencia de exponente par de base negativa, conduce a un resultado positivo.

ii) Una potencia de exponente impar de una base negativa conduce a un resultado negativo

Así por ejemplo:

$(-3)^2 = 9$ $\qquad$ $- 3^2 = -9$

$(-3)^3 = -27$ $\qquad$ $- 3^3 = -27$

Observemos detenidamente las expresiones de la primera fila. En las de la derecha el signo - no está afectado de la potencia 2 , es decir significa verbalmente "menos la potencia segunda de tres"; y siendo la potencia segunda ésta, necesariamente positiva, el resultado precedido por el signo - será negativo.

En las expresiones de la izquierda el signo - está afectado de la potencia segunda, debiendo recordarse para justificar la regla enunciada anteriormente, la regla de los signos de la multiplicación, que esquemáticamente decía:

más por más = más

más por menos = menos

menos por menos = más

21.- RADICACION

Se llama raíz m-ésima de un número a todo número que elevado a la potencia m-ésima sea igual al número dado.

Así se tendrá:

$$\sqrt[m]{a} = b \qquad \text{si} \qquad b^m = a$$

y en un ejemplo numérico:

$$\sqrt[3]{125} = 5 \qquad \text{si} \qquad 5^3 = 125$$

en donde 125 (número cuya raíz se busca), recibe el nombre de radicando, o cantidad sub-radical, y 3 índice de la raíz.

a) <u>PROPIEDADES</u>:

Un número no altera si se le extrae la raíz y se lo eleva a la potencia del mismo grado. Así por ejemplo

$$a = \left(\sqrt[n]{a}\right)^n$$

Prácticamente, cuando se presente tal caso se dirá que se simplifican el orden de la potencia con el índice de la raíz, procediéndose a cancelar entre sí los símbolos indicadores de tales operaciones.

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$$

b) <u>NOTACION DE RAICES COMO POTENCIAS DE EXPONENTE FRACCIONARIO</u>.

Notaremos

$$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{m}} = a^{1/m}$$

Así habremos adoptado, para representar una raíz, una potencia de base igual a la cantidad sub-radical o radicando, y de exponente igual a la recíproca del índice de la raíz. Por otra parte se cumplirán en esta notación de potencia de exponente fraccionario, las propiedades dadas como corolario de la definición de raíz.

$$\left(a^{1/m}\right)^m = a^{\frac{1}{m} \cdot m} = a^{m/m} = a$$

c) Como es natural gozarán las raices, de las mismas propiedades enunciadas para la potenciación:

i) la de ser distributivas respecto del producto y del cociente;

ii) la de no ser distributivas respecto de la suma ni de la resta.

Así se tendrá como ejemplo de la <u>primera propiedad</u>

$$\sqrt[n]{a.b} = \sqrt[n]{a} . \sqrt[n]{b}$$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

y como ejemplo de la <u>segunda propiedad</u>, en

$\sqrt[n]{a+b+c}$ se destacará que no debe distribuirse la raíz respecto a los términos que forman el radicando.

d) <u>Introducción de Factores dentro de un Radical</u>.

Cuando se tiene un factor que multiplica a un radical, se lo puede introducir dentro del mismo elevándolo a potencia de orden igual al índice de la raíz. Se tiene así:

$$a \cdot \sqrt[3]{b} = \sqrt[3]{a^3 \cdot b}$$

e) Para las operaciones de producto de raices de igual radicando, raíz de raíz, raiz de potencia, y potencia de raíz, es recomendable emplear la notación de potencia de exponente fraccionario y aplicar las propiedades ya vistas relativas a la potenciación.

Así por ejemplo

$$\sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[n]{a} = a^{1/m} \cdot a^{1/n} = a^{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}$$

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = (a^{1/n})^{1/m} = a^{\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{m}} = a^{\frac{1}{mn}}$$

$$\sqrt[m]{a^n} = \left(a^n\right)^{\frac{1}{m}} = a^{n \cdot \frac{1}{m}} = a^{n/m}$$

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \left(a^{1/n}\right)^m = a^{\frac{1}{n} \cdot m} = a^{m/n}$$

22.- <u>POLINOMIOS</u>.

Designaremos con el nombre de monomios a aquellas expresiones algebraicas que constan de un solo término. Así por ejemplo:

$$6\,a^2\,b \;;\; 2\,x \;;\; 5\,a^2\,b^2 \;;\; 12 \times 16 \,.\, a \,.\, x^{-2} \;;$$

son monomios.

Designaremos con el nombre de polinomios a aquellas expresiones algebraicas que constan de más de un término.

(Como casos particulares de estos últimos, observamos los binomios y trinomios, con 2 y 3 términos respectivamente.) Así:

$$2a + 3 \;;\; 3 + 5x - 2x^2 \;;\; 5a^2 b + 3ab^3 + 2b$$

son polinomios.

a) GRADO DE UN POLINOMIO, en relación a una determinada letra, es la potencia de mayor orden en cualquiera de sus términos. Así por ejemplo, se dirá que

$$x^4 + 2x^3 - 5x^2 + x - 3$$

es un polinomios de cuarto grado.

b) Un polinomio se dirá Completo cuando presente todos los exponentes intermedios entre el mayor (que determina el grado) y el menor.

c) Un polinomio se dirá Ordenado respecto a una letra cuando las potencias de sus sucesivos términos, respecto a esa letra, sigan un orden determinado; ascendente o bien descendente.

Así el polinomio:

$$5x^2 - 3x^4 - 2x^3 + x^5 - x + 2$$

se escribirá ordenándolo en forma descendente:

$$x^5 - 3x^4 - 2x^3 + 5x^2 - x + 2$$

d) Se llama término independiente de un polinomio en una determinada letra (x, y, a, etc) a aquel término que no presente dicha letra.

Así en el polinomio anterior en la letra x, el término independiente será el último, siendo su valor 2.

23.- OPERACIONES CON POLINOMIOS.

a) Suma de Polinomios.

Para sumar dos o más polinomios se suman los coeficientes de los términos semejantes.

Si los polinomios están ya ordenados se dispondrá esquemáticamente la suma de los mismos de la siguiente manera:

$$\begin{array}{r} 2x^3 - 5x^2 + 3x - 5 \\ 3x^3 + 2x^2 - 2x + 3 \\ \hline 5x^3 - 3x^2 + x - 2 \end{array}$$

En la práctica cuando se opera con polinomios no ordenados, se los deberá ordenar primeramente y, eventualmente, en caso de tratarse de polinomios incompletos, convendrá completar los términos que faltan, agregando términos de coeficiente cero, o dejando en blanco el lugar correspondiente a dichos términos.

Así por ejemplo para sumar los polinomios

$$-2x + 5x^3 - 3 + 2x^2 \quad \text{y} \quad 3x^4 + 2x - 5x^2$$

se los dispondrá de la siguiente manera:

$$\begin{array}{r} 5x^3 + 2x^2 - 2x - 3 \\ 3x^4 + 0x^3 - 5x^2 + 2x + 0 \\ \hline 3x^4 + 5x^3 - 3x^2 + 0x - 3 \end{array} \quad \text{que se escribirá:}$$

$$3x^4 + 5x^3 - 3x^2 + 3$$

b) <u>Multiplicación de un Polinomio por un Monomio</u>.

Supongamos que se quisiera efectuar la operación de multiplicar

$$(a + b + c) \times d$$

que equivale a considerar d sumandos iguales a $(a+b+c)$. Se tendrá:

$$(a+b+c)\ d = \overbrace{(a+b+c)+(a+b+c)+\ldots+(a+b+c)}^{d}$$

$$= \overbrace{a+a+\ldots+a}^{d}+\overbrace{b+b+\ldots+b}^{d}+\overbrace{c+c+\ldots+c}^{d}$$

$$= a\,d+b\,d+c\,d$$

De la observación de la descomposición anterior se desprende la siguiente regla:

El resultado de multiplicar un polinomio por un monomio es igual a la suma de los términos que se obtienen multiplicando el monomio por cada uno de los términos del polinomio.

Así se observará:

i) $(x+y)\ a = a\,x+a\,y$

ii) $(x-y)\ a = a\,x-a\,y$

iii) $(2\,x^2+x)\ x = 2\,x^3+x^2$

iv) $(5\,x^3-3\,x^2+2)\ 2\,x^2 = 10\,x^5-6\,x^4+4\,x^2$

c) <u>Multiplicación de dos polinomios entre sí</u>.

Consideremos por ejemplo el problema de multiplicar:

$(a+b)\times(x+y)$

Si en el producto anterior sustituimos uno de los factores, por ejemplo $(x+y)$ por un símbolo m tal que sea: $m = (x+y)$ se podrá escribir:

$$(a+b)\times(x+y) = (a+b)\cdot m$$

Elaborando el segundo miembro de esta nueva expresión conforme a la regla anunciada anteriormente, se tendrá:

$$(a + b)\ m = a\ m + b\ m$$

sustituyendo ahora m por su igual $(x+y)$, la anterior leerá:

$$(a+b)\ (x+y) = a\ (x+y) + b\ (x+y)$$

Aplicando a cada término del segundo miembro la regla enunciada en b) se tendra:

$$(a+b)\ (x+y) = a\ x + a\ y + b\ x + b\ y$$

De la observación de la anterior se desprenderá la siguiente regla:

El resultado de multiplicar dos polinomios entre si es igual a la suma de los términos que se obtienen multiplicando cada uno de los términos del multiplicando.

Así se observará:

1) $(2\ a + 3\ b)\ (m+n) = 2\ a\ m + 2\ a\ n + 3\ b\ m + 3bn$

Observación

Cuando los polinomios a multiplicarse tienen sus términos ordenados según potencias de una misma letra, se recomienda, a fin de obtener resultados ordenados, proceder de la manera dispuesta a continuación:

Sea por ejemplo el problema de multiplicar los polinomios:

$$3x^2 + 3x - 2 \quad y \quad 2x - 1$$

si los mismos no estuvieran como en este caso ordenados según potencias decrecientes de x se procederá a ordenarlos, disponiéndolos luego en la siguiente forma:

$$\begin{array}{r} 3x^2 + 3x - 2 \\ 2x - 1 \\ \hline 6x^3 + 6x^2 - 4x \qquad \\ -3x^2 - 3x + 2 \\ \hline 6x^3 + 3x^2 - 7x + 2 \end{array}$$

d) <u>División de un polinomio por un monomio</u>.

<u>REGLA</u>:

Como consecuencia de la propiedad distributiva del cociente respecto de la suma, el cociente de dividir un polinomio por un monomio será igual a otro polinomio de grado igual a la diferencia de grados entre el dividendo y el divisor, y que tiene por términos, el cociente de dividir cada uno de los términos del dividendo por el monomio divisor.

Así por ejemplo:

$$(2x^2 - 3x + 2) \div 4 = \tfrac{1}{2}x^2 - 3/4\,x + \tfrac{1}{2}$$

$$(3x^3 + 2x^2 - x) \div x = 3x^2 + 2x - 1$$

e) <u>División de un polinomio por otro polinomio</u>.

Dividir un polinomio por otro polinomio significa encontrar un tercer polinomio de grado igual a la diferencia de grados entre el dividendo y el divisor, y tal que multiplicado por el divisor, restituya el dividendo.

Para encontrar el polinomio cociente se procederá siguiendo la siguiente regla:

1) Se ordenan tanto el dividendo como el divisor según potencias decrecientes (o bien crecientes) de una misma letra;

2) Se halla el cociente parcial de dividir el primer término del dividendo por el primer término del divisor.

3) Se multiplica este cociente parcial por cada uno de los términos del divisor.

4) Se restan ordenadamente del dividendo estos productos así obtenidos (OBSERVACION: para que la operación de resta sea más simple, al efectuar los productos del cociente parcial por cada uno de los términos del divisor se le asignarán signo contrario a los que por regla les corresponden, procediendo a sumarlos al dividendo en vez de restarlos).

5) Se divide el término de mayor grado del dividendo así formado por el término de mayor grado del divisor, y se repiten los pasos 3 y 4 hasta agotar la división.

El resultado final de la operación puede responder a uno de los dos casos siguientes:

a) que el dividendo sea exactamente divisible por el divisor.

b) que el dividendo no sea exactamente divisible por el divisor.

En el primer caso la secuencia propuesta en el punto 5 se agotará cuando el producto (cociente parcial por divisor), que de acuerdo al paso 4 se sustrae del dividendo, resulte igual al mismo, produciendo en consecuencia un resto cero.

En el segundo caso llegará un momento en que los sucesivos dividendos alcancen un grado inferior al del divisor. El primer valor del dividendo con tal propiedad recibe el nombre de resto.

Esquemáticamente, y como consecuencia de la definición dada al comienzo de este párrafo:

$$\boxed{\frac{\text{Dividendo}}{\text{Divisor}} = \text{Cociente} + \frac{\text{Resto}}{\text{Divisor}}}$$

Resultando en consecuencia:

$$\boxed{\text{Dividendo} = \text{Cociente} \times \text{Divisor} + \text{Resto}}$$

Trátese por ejemplo de efectuar la siguiente división de polinomios:

$$(x^5 - 4x^4 + 9x^3 - 13x^2 + 6x) : (x^2 - 2x)$$

A tal efecto dispondremos dicha operación de la siguiente manera:

DIVIDENDO DIVISOR

$$\begin{array}{l|l}
x^5 - 4x^4 + 9x^3 - 13x^2 + 6x & x^2 - 2x \\
\underline{x^5 + 2x^4} & \hline \\
\quad - 2x^4 + 9x^3 & x^3 - 2x^2 + 5x - 3 \\
\quad \underline{+ 2x^4 - 4x^3} & \\
\qquad\qquad 5x^3 - 13x^2 & \\
\qquad\quad \underline{- 5x^3 + 10x^2} & \\
\qquad\qquad\qquad - 3x^2 + 6x & \\
\qquad\qquad\qquad \underline{+ 3x^2 - 6x} & \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\quad 0 &
\end{array}$$

COCIENTE

RESTO

Resultará así el cociente igual a $x^3 - 2x^2 + 5x -$

Según la definición de cociente, este polinomio será tal que multiplicado por el divisor restituya al dividendo.

En efecto; multiplicando dichos polinomios se tiene

$$
\begin{array}{lrl}
 & x^3 - 2x^2 + 5x - 3 & \text{COCIENTE} \\
\text{DIVISOR} & x^2 - 2x & \\
\hline
 & x^5 - 2x^4 + 5x^3 - 3x^2 \qquad & \\
 & - 2x^4 + 4x^3 - 10x^2 + 6x & \\
\hline
 & x^5 - 4x^4 + 9x^3 - 13x^2 + 6x & \text{DIVIDENDO}
\end{array}
$$

Si al efectuar la división entre polinomios no se llega como en el caso anterior a un resto cero, se dispondrán los resultados de la siguiente manera:

Supongamos se quiera efectuar el cociente entre $(2x^3 - 3x^2 + 2x - 5)$ y $(x+5)$ para lo cual disponemos estos dos polinomios en la forma que es habitual

$$
\begin{array}{l|l}
\text{DIVIDENDO} & \\
2x^3 - 3x^2 + 2x - 5 & x+5 \quad \text{DIVISOR} \\
\cline{2-2}
\underline{-2x^3 - 10x^2} & 2x^2 - 13x + 67 \\
\quad - 13x^2 + 2x & \qquad \text{COCIENTE} \\
\quad \underline{+ 13x + 65x} & \\
\qquad\qquad 67x - 5 & \\
\qquad\quad \underline{- 67x - 335} & \\
\qquad\qquad\quad - 340 \quad \text{RESTO} &
\end{array}
$$

Resultando:

$$(2\,x^3 - 3\,x^2 + 2\,x - 5) \quad (x+5) = 2\,x^2 - 13\,x + 67 + \frac{340}{x\ 5}$$

Una comprobación de la exactitud de esta división,se la obtiene efectuando el producto del cociente hallado por el divisor, y sumándole el resto, debiendo obtenerse como consecuencia de la definición de cociente, el dividendo.

En este caso particular se tiene:

$$\begin{array}{rl}
2\,x^2 - 13\,x + 67 & \text{COCIENTE} \\
x + 5 & \text{DIVISOR} \\
\hline
2\,x^3 - 13\,x^2 + 67\,x & \\
10\,x^2 - 65\,x + 355 & \\
\hline
2\,x^3 - 3\,x^2 + 2\,x + 335 & \\
-\,340 & \text{RESTO} \\
\hline
2\,x^3 - 3\,x^2 + 2\,x - 5 & \text{DIVIDENDO}
\end{array}$$

que comprueba la exactitud de la división efectuada.

24.- TABLAS NUMERICAS PARA LA OBTENCION DE CUADRADOS, CUBOS, RAICES CUADRADAS Y RAICES CUBICAS.

En páginas 2 a 17 de las TABLAS MATEMATICAS, de Edward Allen con la denominación CUADRADOS, CUBOS, RAICES CUADRADAS Y CUBICAS, CIRCUNFERENCIAS Y AREAS,se tienen tabulados los respectivos valores para los números naturales entre 1 y 1000.

La disposición de la tabla de la que estudiaremos sus cinco primeras columnas, hace que resulte inmediata la determinación de un cuadrado, cubo, raiz cuadrada o cúbica de cualquier número natural comprendido entre 1 y 1000.

Observemos la trancripción de las 5 primeras filas de la tabla según aparecen en la página 16.

No.	Cuad.	Cubo	Raiz Cuad.	Raiz Cub.
875	765,625	669,921,875	29,5804	9.5647
876	767,876	672,221,376	29.5973	9.5683
877	769,129	674,526,133	29.6142	9.5719
878	770,884	676,836,152	29.6311	9.5756
879	772,641	679,151,439	29.6479	9.5792

La forma de consultar la tabla es la siguiente:

a) Se entra a la misma por la columna de la extrema izquierda, señalada con la denominación No. y se resbala por la misma hasta encontrar el número cuya potencia o raiz se busca.

b) En una misma linea con dicho número se tendrá en la columna segunda, tercera, cuarta y quinta respectivamente, el cuadrado, cubo, raiz cuadrada y cúbica de dicho número.

Cuando el número cuya potencia o raiz se quiere determinar no figura en la tabla, se procederá según los siguientes casos:

1) Si el número en cuestión está comprendido entre dos números que figuran en la tabla se procederá según el siguiente ejemplo: Supongamos se quiera hallar la raiz cuadrada de 876.3, número comprendido entre 876 y 877.

Como la raiz cuadrada varía en forma continua el variar el número, la raiz de un número comprendido entre otros dos, estará comprendida entre las respectivas raices de dichos números. Así se supondrá que la raiz cuadrada de 876.3, cuyo valor se quiere determinar, estará comprendida entre las raices de los números 877 y 876, ambos, números de nuestra tabla.

Dispondremos las raices en cuestión, según el siguiente cuadro,

N U M E R O	Rz. Cuadrada
877	29.6142
876.3	
876	29.5973
	$\Delta = 0.0169$

y efectuaremos el siguiente razonamiento:

Si cuando el número varía en 1 unidad, la raíz varía en 0.0169, nos preguntamos que variación en la raíz corresponderá a una variación de 0.3 en el número. Razonamiento que tiene su expresión en la siguiente relación ó regla de tres:

$$\frac{1}{0.0169} = \frac{0.3}{x}$$

en donde x, que representa la variación de la raíz buscada, resulta:

$$x = 0.0169 \times 0.3 = 0.00507$$

Sumando este incremento o variación, al valor dado para la raíz de 876 se tiene

$$\sqrt{876.3} = \begin{array}{r} 29.5973 \\ 0.00507 \\ \hline 29.60237 \end{array}$$

resultado que redondeado en 4 cifras decimales se escribirá:

$$\sqrt{876.3} = 29.6024$$

Una forma de comprobar si el resultado es factible de ser cierto, nos la da el hecho de que esta raíz cuadrada hallada por interpolación, debe estar comprendida entre las raíces cuadradas de 876 y 877, hecho que podemos verificar.

OBSERVACION:

Se procederá en forma completamente similar a la expuesta, en el caso que se deba interpolar más de una cifra decimal.

Calcular interpolando los valores dados por la tabla, el cubo de 187.32. Disponiendo los valores tabulares en la forma acostumbrada se tendrá:

Número	Cubo
188	6,644,672
187	6,539,203

$$\frac{1}{105,469} = \frac{0.32}{X}$$

$$X = 105,469 \times 0.32$$

$$X = 33,750.08$$

$$\begin{array}{r} 6,539,203 \\ + \quad 33,750,08 \\ \hline (187.32)^3 = 6,572,953.08 \end{array}$$

ii) Si el número en cuestión no está comprendido entre los números dados por la tabla, se le multiplicará por convenientes potencias de diez para referirlo al caso anterior.

Así por ejemplo si se quiere calcular $\sqrt{0.00085}$ se procederá de la siguiente forma:

$$\sqrt{0.00085} = \frac{\sqrt{0.00085 \quad 10^5}}{\sqrt{10^5}} = \frac{\sqrt{85}}{\sqrt{10^5}}$$

o para mayor comodidad.

$$\sqrt{0.00085} = \frac{\sqrt{850}}{\sqrt{10^6}} = \frac{\sqrt{850}}{\sqrt{10^6}} = \frac{\sqrt{850}}{10^3}$$

la elección del orden más conveniente para la potencia de diez, seis en el caso anterior, dependerá de la capacidad de la tabla, hasta 1000 en la de Allen, y orden de la raíz, tratándose en lo posible de lograr una simplificación entre el orden de dicha potencia y el índice de la raíz, facilitando así la correspondiente división numérica.

Como regla práctica, para el cálculo de raices cuadradas de números que no figuren en la tabla, podrá sugerirse multiplicar o dividir el mismo por potencias pares de 10, reservando para las raices cúbicas, las potencias de 10 de exponentes múltiplos de 3.

25.- LOGARITMOS.

Se llama logaritmo en base a (positiva y distinta de uno) de cualquier número (positivo) a la potencia a que hay que elevar la base para obtener el número dado.

Así se escribirá:

$$\log b = c$$

cumpliéndose por definición $a^c = b$ y en consecuencia

$$a^{\log_a b} = b$$

Numéricamente se tendrá:

$$\log_2 32 = 5 \quad \text{porque} \quad 2^5 = 32$$

$$\log_3 27 = 3 \quad \text{porque} \quad 3^3 = 27$$

Resulta como consecuencia de la definición, que existen infinitos sistemas de logaritmos, según se le asignen valores (positivos y distintos de 1) a la base a.

En la práctica se trabajará casi exclusivamente con logaritmos de base 10, a los que llamamos logaritmos vulgares, decimales, o de Briggs. (Dado este nombre en honor del matemático inglés que por primera vez calculó y publicó una Tabla de logaritmos.) Otro tipo de logaritmos, llamados naturales o Neperianos, considera como base un número trascendente del análisis, el número e .

OBSERVACIONES:

1) En cualquier sistema de logaritmos el logaritmo de la base es igual a uno.

Así por ejemplo:

$\log_a a = 1$ ya que $a^1 = a$.

2) En cualquier sistema el logaritmo de la unidad es cero.

Así se tiene:

$\log_a 1 = 0$ ya que $a^0 = 1$

3) Si la base, que debe ser positiva, se toma mayor que 1, cada número mayor que uno tendrá un logaritmo positivo, y a cada número menor que uno, le corresponderá un logaritmo negativo. (Inversamente ocurrirá si se considera la base menor que uno).

26.- PROPIEDADES FUNDAMENTALES DE LOS LOGARITMOS.

1) Logaritmo de un producto.

En una base cualquiera el logaritmo del producto de dos números (positivos), es igual a la suma de los logaritmos de los factores.

$$\log_a (b.c) = \log_a b + \log_a c$$

En efecto: en virtud de la definición de logaritmo se tiene:

$$b = a^{\log_a b} \quad ; \quad c = a^{\log_a c}$$

multiplicando m.a.m. se tendrá:

$$b \times c = a^{\log_a b} \times a^{\log_a c}$$

$$b \times c = a^{\log_a b + \log_a c}$$

que nos dice: $(\log_a b + \log_a c)$ es la potencia a que hay que elevar la base "a" para obtener $b \times c$. En virtud de la definición de logaritmo se tendrá entonces:

$$\boxed{\log_a (b \times c) = \log_a b + \log_a c}$$

ii) Una extensión de ésta propiedad nos conduce a la siguiente:

$$\log_a (b \times c \times d \times e) = \log_a b + \log_a c + \log_a d + \log_a e$$

iii) <u>Logaritmo de un cociente</u>.

En cualquier base el logaritmo del cociente de dos números (positivos) es igual a la diferencia entre el logaritmo del dividendo y el logaritmo del divisor.

Así por ejemplo:

$$\log_a \left(\frac{b}{c} \right) = \log_a b - \log_a c$$

En efecto; de la igualdad

$$\frac{b}{c} \times c = b$$

Se deduce, al aplicar el teorema anterior

$$\log_a \left(\frac{b}{c} \right) + \log_a c = \log_a b$$

de donde:

$$\boxed{\log_a \left(\frac{b}{c} \right) = \log_a b - \log_a c}$$

iv) Un caso particular de esta propiedad se obtiene al considerar $b = 1$. Se tiene así:

$$\log_a \left(\frac{1}{c} \right) = - \log_a c$$

A esta cantidad ($-\log_a c$) se la designa con el nombre de colog~~aritmo~~.

v) Logaritmo de una potencia.

El logaritmo de una potencia cualquiera de un número positivo, se obtiene multiplicando el exponente por el logaritmo de la base de la potencia.

Así por ejemplo:

$$\log_a b^c = c \times \log_a b$$

En efecto: en vitud de la definición de logaritmo se tiene:

$$b = a^{\log_a b}$$

elevando ambos miembros a la potencia c se tendrá:

$$b^c = a^{c \times \log_a b}$$

que nos dice que: ($c \times \log_a b$) es la potencia a que hay que elevar la base a para obtener el número b^c. Será en consecuencia:

$$\boxed{\log_a b^c = c \times \log_a b}$$

vi) Logaritmo de una raiz.

Como una consecuencia de la propiedad anterior se tiene que el logaritmo de una raiz es igual al cociente de dividir el logaritmo de la cantidad sub-radical por el índice de la raiz.

Así se tiene:

$$\log_a \sqrt[n]{b} = \log_a b^{\frac{1}{m}} = \frac{1}{n} \times \log_a b$$

27.- LOGARITMOS DECIMALES.

Como se recordará, denominamos así a aquel sistema de logaritmos que adopta como base el número 10.

De ahora en adelante, al referirnos a los logaritmos decimales, escribiremos log x en lugar de $\log_{10} x$.

De acuerdo a la definición de logaritmo, se observa que las potencias enteras de 10 tendrán por logaritmo, el órden de la potencia.

Así:

$\log 100 = 2$ ya que $10^2 = 100$

$\log 100{,}000 = 5$ ya que $10^5 = 100{,}000$

$\log 0.1 = -1$ ya que $10^{-1} = \frac{1}{10} = 0.1$

$\log 0.01 = -2$ ya que $10^{-2} = \frac{1}{10^2} = 0.01$

Así, los números que están comprendidos entre potencias enteras de diez, tendrán por logaritmos números comprendidos entre dichas potencias.

Los logaritmos decimales están en consecuencia, formados por una parte entera que recibe el nombre de característica, y una parte decimal llamada mantisa.

Así se tiene:

$$\log n = c + m$$

en donde c, la característica, se determina siguiendo una de las siguientes reglas:

Regla I.- La característica del logaritmo de un número mayor que uno, se obtiene disminuyendo en una unidad el número de cifras de la parte entera.

Regla II. La característica del logaritmo de un número positivo menor que 1, tiene tantas unidades negativas como ceros precedan a la primera cifra significativa del número.

y m, la mantisa, se obtiene consultando la tabla de logaritmos decimales.

PROPIEDAD DE LAS MANTISAS DE LOS LOGARITMOS DE DOS NUMEROS QUE DIFIEREN EN POTENCIA ENTERA DE 10.

La mantisa de logaritmo decimal de un número no altera cuando se multiplica o divide al número por una potencia entera de 10. En efecto:

$$\log (b \times 10^n) = \log b + \log 10^n$$

$$\log (b \times 10^n) = \log b + n$$

como n se consideró un número entero, queda así demostrado que su valor no altera el valor de la mantisa.

TABLAS DE LOGARITMOS DECIMALES:

Estudiaremos las provistas en la colección "Tablas

Matemáticas" de Edward Allen. En ella aparecen las mantisas de los logaritmos de números de cuatro cifras, calculadas estas mantisas con seis decimales.

Por la disposición de la tabla observamos que la misma es a doble entrada. Para leer,en este tipo de presentación tabular, el valor de la mantisa que corresponde a un determinado número, se deberá resbalar verticalmente por la primer columna de la tabla, hasta llegar a una línea que tenga como cabecera las tres primeras cifras significativas del número cuya mantisa buscamos; y desplazarse luego horizontalmente por esta línea hasta llegar a una casilla cuyo encabezamiento corresponda a la cuarta cifra del número buscado. En esa casilla se podrá leer la mantisa del logaritmo del número buscado.

Para fijar mejor las ideas efectuemos un ejercicio numérico. Supongamos que se quiera buscar el logaritmo del número 6843. Para ésto procederemos de la siguiente manera:

1) Calculamos la característica que corresponde al logaritmo de este número; 3 en este caso, ya que se trata de un número de cuatro cifras.

2) Buscamos la mantisa que corresponde a este número. Procediendo en la forma indicada en el párrafo anterior resbalamos a lo largo de la primera columna de la tabla hasta encontrar el número 684 (página 45) y luego nos desplazamos horizontalmente hasta colocarnos debajo de la columna encabezada con el número 3. (Habremos llegado así, con esta doble entrada, a la posición que le corresponde en la tabla al número 6843). En este lugar hallamos la segunda tercera, cuarta, quinta y sexta cifra correspondiente a la mantisa del logaritmo de 6843. Las dos primeras cifras de la mantisa del logaritmo buscado, por no variar muy rapidamente, permanecen constantes para unos cuantos números, y tal es la razón por la que se omite su escritura para cada número. Estas dos primeras cifras, 83 en este caso, aparecen a la izquierda, en la columna encabezada con la cifra 0, correspondiendo las mismas a todo el grupo demarcado entre trazos horizontales.

En nuestro ejemplo se tendrá que la mantisa de 6843 es igual a 0.835247 ; de la cual las dos primeras cifras comunes al grupo son leidas en la columna 0 a la altura del número 677 y las últimas cuatro son leidas en la intersección de la fila correspondiente al número 684 con la columna correspondiente al número 3.

Se tiene así, que el logaritmo decimal del número 6843, correcto con 6 cifras decimales será:

$$\log 6843 = \underbrace{3}_{\text{caracte-rística}} + \underbrace{0.835247}_{\text{mantisa}}$$

Este resultado se escribirá:

$$\log 6843 = 3.835247$$

Si se quisiese calcular el logaritmo de un número de menos de cuatro cifras, se trabajará de idéntica manera, recordando la propiedad ya vista que dice: la mantisa del logaritmo de un número no altera si se multiplica o divide al número por una potencia entera de diez.

Si para fijar las ideas quisiéramos por ejemplo determinar la mantisa del logaritmo de 276, como ésta será igual a la que corresponde al logaritmo de 2760, se tendrá en la tabla correspondiendo a tal valor el número 440909. Como la característica de 276 es 2 se tendrá

$$\log 276 = 2.440909$$

28.- <u>Búsqueda del logaritmo de un número que no figura en la tabla</u>.

Sea por ejemplo nuestro problema buscar el logaritmo del número 5682.3 . Vemos de inmediato que por tratarse de un número de cinco cifras, escapa al alcance de la tabla, que solo abarca números de hasta cuatro cifras. Para obviar este inconveniente interpolaremos linealmente los valores númericos provistos por nuestra tabla de logaritmos. Al efectuar la interpolación se establece el siguiente supuesto: por ser el logaritmo una función continua de una variable contínua,ocurrirá que, a pequeñas variaciones de la variable corresponderán pequeñas variaciones de la función. Esta propiedad de las funciones contínuas es la que justifica el siguiente razonamiento:

La tabla provée la mantisa del logaritmo de 5682, que es 0.754501, y la mantisa de logaritmo de 5683,que es 0.754578 . Como el número cuya mantisa se quiere determinar, 5682.3 está comprendido entre 5682 y 5683, su mantisa estará comprendida entre las correspondientes mantisas. Esquemáticamente esto se sintetiza de la siguiente manera:

$$5682 < 5682.3 < 5683$$

$$\log 5682 < \log 5682.3 < \log 5683$$

Consultada la tabla cambiaremos las anteriores desigualdades por el siguiente par

$$5682 < 5682.3 < 5683$$

$$3.754501 < \log 5682.3 < 3.754578$$

Ante las que efectuamos el siguiente razonamiento: cuando la variable varía en una unidad de la cuarta cifra (de 5682 a 5683) la mantisa varía en 71 unidades de la sexta cifra (de.754501 a .754578), en consecuencia a una variación de 0.2 unidades de la variable corresponderá una variación de x unidades de la mantisa. Este esquema equivale a resolver la siguiente regla de tres:

$$\frac{1}{71} = \frac{0.2}{x}$$

de donde x , incremento o variación de la mantisa resulta:

$$x = 0.2 \times 7.1 = 14.2$$

que nos dice que a una variación de 0.2 en la variable corresponde una variación de 14.2 unidades de la sexta cifra en la característica.

Consecuentemente, el logaritmo del número 5682.2 se obtendrá sumándole al logaritmo de 5682 la variación que se acaba de calcular.

A fin de trabajar ordenadamente dispondremos nuestros cálculos de la siguiente manera:

$$\begin{array}{rll} & \log\ 5682 & = 3.754501 \\ \Delta = 71\ ; & \text{p.p.}\qquad .2 & = \qquad 14.2 \\ \hline & \log\ 5682.2 & = 3.754514 \end{array}$$

OBSERVACION: el incremento de la función, 71 en este ejemplo, suele indicarse tanto con el símbolo Δ como con la abreviatura dif.

29.- Empleo de las tablas de partes proporcionales en la búsqueda de logaritmo de un número que no figura en la tabla.-

A fin de evitarnos el trabajo de estar resolviendo un problema de regla de tres, cada vez que se deba buscar el logaritmo de un número que no figura en la tabla, recurriremos a las tablas de partes proporcionales que figuran en la parte inferior de cada página de nuestra tabla de logaritmos. Ellas no son otra cosa que tablas de multiplicar, en donde uno de los factores se considera igual al incremento de la variable y el otro igual a la diferencia tabular o incremento de la función.

Habíamos visto en el número anterior que para resolver la regla de tres que planteamos, se debía multiplicar el incremento de la variable por la diferencia tabular observada. Precisamente el resultado de esta multiplicación se halla en la intersección de la fila correspondiente a la diferencia tabular observada con la columna correspondiente al incremento de la variable. Siguiendo el ejemplo anterior se observa en la intersección de la fila correspondiente a una diferencia tabular 71, con la columna correspondiente a un incremento de la variable de .2, el valor 14.2, que indica la cantidad correspondiente a la variación de la función para una variación de la variable de .2.

La presentación ordenada de los resultados, empleando la tabla de partes proporcionales, observará la misma forma que la vista en el párrafo anterior.

Cuando se busca el logaritmo de un número de más de cinco cifras, 6 por ejemplo, se deberán interpolar dos cifras en la variable, lo que es resuelto en la forma corriente si se trabaja directamente resolviendo la regla de tres. Para emplear en este caso la tabla de partes proporcionales, se deberá trabajar cifra por cifra, interpolando primero la quinta cifra tal como se hiciera anteriormente y cuidando al interpolar la sexta cifra, de correr la ubicación del punto decimal en un lugar hacia la izquierda.

<u>Ejemplo numérico</u>: Consideremos por ejemplo la búsqueda del logaritmo del número 8654.63, que dispondremos de la siguiente manera:

$$\begin{array}{lrcl} & \log 8654 & = & 3.937217 \\ \Delta = 50; & \text{p.p } .6 & = & 30 \\ & \text{p.p } .03 & = & 1.5 \\ \hline & \log 8654.63 & = & 3.937258\,5 \\ & \log 8654.63 & = & 3.937259 \end{array}$$

resultado que redondeamos reforzando en una unidad la sexta cifra. La parte proporcional correspondiente a .6 ó sea 30, es leída directamente en la tabla, mientras que la parte proporcional correspondiente a .03 o sea 1.5 se obtiene desplazando un lugar hacia la izquierda la posición del punto decimal que muestra la tabla, 15 en este caso.

30.- <u>Interpolación en la búsqueda de antilogaritmos</u>.

Hasta ahora se ha considerado el problema directo, es decir dado el número se pide determinar su logaritmo. Consideraremos ahora el problema inverso o sea: conocido el logaritmo, encontrar el número al cual corresponde. A esta operación inversa se la designa con el nombre de antilogaritmación.

Si se tiene por ejemplo:

$$\log\ x = a$$

se tendrá:

$$\text{antilog}\ a = x$$

Para la determinación del antilogaritmo de un número se empleará la tabla de logaritmos, entrando por el valor de la mantisa o parte decimal y considerando la parte entera o característica para la afijación del punto decimal en el resultado.

De esta forma si por ejemplo se quisiera determinar el antilogaritmo de 2.635584, la mantisa buscada en la tabla me conduce al número 432.1, entendiendo que tiene tres cifras enteras ya que la característica , 2 en este caso, así lo indica.

Inmediatamente se comprende que al buscar el antilogaritmo de un número, muy difícilmente figure éste en la tabla. Si por ejemplo hubiéramos buscado el antilogaritmo de 2.635624,no obtendríamos un resultado exacto. Para obviar esta dificultad es que se procede a interpolar al buscar un antilogaritmo que no figura en la tabla.

Para llevar a cabo esta interpolación se efectúa el siguiente razonamiento: como la mantisa 635624 está comprendida entre 635584 y 635685 (que son respectivamente las mantisas de los logaritmos de los números cuyas primeras cuatro cifras significativas son 4321 y 4322) a ella le corresponderá un número comprendido entre estos dos. Se tendrá así que a 635624 corresponderá,(no considerando la ubicación del punto decimal) un número mayor que 4321 y menor que 4322. Para determinar el incremento correspondiente, se plantea la siguiente regla de tres: cuando la mantisa varía en 101 unidades, diferencia entre 635624 y 635685, el correspondiente número varía en una unidad de la cuarta cifra, luego a una variación de 40 unidades en la mantisa corresponderá una variación proporcional en el número. Esquemáticamente

Se tendrá:

$$\frac{101}{40} = \frac{1}{x}$$

de donde resulta el valor de x , incremento del número

$$x = \frac{40}{101} = 0.396$$

expresado en unidades de la cuarta cifra.

Esta operación puede ser resuelta en una primera aproximación empleando las tablas de partes proporcionales provistas por las tablas de logaritmos. Para ésto, una vez determinada la diferencia tabular, 101 en este caso, se entra a la tabla buscando en la fila correspondiente a dicha diferencia tabular, a que número corresponde el valor 40. Así en esta forma se cambia el sentido de consulta a la tabla entrando por el número y saliendo por el encabezamiento de la columna. El valor 40 no figura en la tabla, pero un valor próximo, 40.4 aparece en la columna del 4, por lo que a nuestra diferencia corresponderá un número algo inferior a 4. El determinar la magnitud de esta aproximación llevaría a resolver una nueva regla de tres, por lo que este método se recomienda tan solo para dar una primera aproximación del incremento correspondiente a un antilogaritmo cuando la mantisa no figura en la tabla.

31.- Logaritmos naturales o neperianos.

Son aquellos que tienen como base del sistema, el número e del análisis, en donde, como se verá más adelante

$$e = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n$$ y en números:

$$e = 2.718828 .$$

Si bien en los cálculos logaritmicos corrientes se emplean casi exclusivamente logaritmos decimales, los problemas logarítmicos del cálculo infinitesimal se expresarán exclusivamente en sistemas de base e . Veremos, por tanto, la relación que hay entre estos dos sistemas de logaritmos.

Por definición de logaritmo se tiene:

en base a

$$x = a^{\log_a x} = x$$

logaritmando en base e ambos miembros

$$\log_e x = \log_a x \cdot \log_e a$$

en base e

$$x = e^{\log_e x} = x$$

logaritmando en base a ambos miembros

$$\log_a x = \log_e x \cdot \log_a e.$$

de donde resulta:

$$\log_e x = \log_a x \cdot \frac{1}{\log_a e}$$

y recíprocamente

$$\log_a x = \log_e x \cdot \frac{1}{\log_e a}$$

Específicamente, para el caso de logaritmos decimales y en base e , resulta la siguiente relación:

$$\lg x = \log x \cdot \frac{1}{\log e} = 2.3026 \cdot \log x$$

y recíprocamente:

$$\log x = \lg x \cdot \frac{1}{\lg 10} = 0.4326 \cdot \lg x$$

fórmulas éstas que permiten expresar el logaritmo neperiano de un número, conocido su logaritmo decimal, así como resolver el problema inverso.

II PARTE

32.- VARIABLES:

Ya se habló al presentar los números reales sobre cómo los números dotados de signo sirven para medir segmentos de recta cuando se les considera orientados. Es necesario que nos ocupemos de éstos en forma más precisa.

Una recta x cualquiera.puede ser recorrida en - dos sentidos distintos y opuestos, a los que llamaremos respectivamente positivo y negativo. (Se acostumbra asignar al sentido de izquierda a derecha el signo positivo, y al sentido contrario, de derecha a izquierda,el signo negativo).

Fijado sobre la recta x un punto O, al que llamaremos origen, y fijada además una unidad de medida, cada punto P de la recta está situado a una distancia $\overline{OP}$ del origen, que está medida por un número bien determinado, al que corresponderá signo positivo o negativo según se encuentre el punto P a la derecha o a la izquierda de O.

Así se hace corresponder al punto P de la recta x un número p , al que se designa con el nombre de abscisa del punto P. Recíprocamente, dado un número a, existe sobre la recta un punto A tal que la medida de la distancia $\overline{OA}$ sea igual a a, es decir admite el número a como abscisa.

Resulta de ésto que al origen O, tomado sobre la recta, habrá de corresponderle una abscisa cero. Asimismo resulta que la abscisa de un punto fijo M sobre la recta, varía al variar el punto que se considere como origen, y al variar la unidad de medida que se considere.

Se observa que,para un sistema fijo, es decir para una dada posición del punto origen O, y una dada unidad de medida, la abscisa de un punto M depende exclusivamente de la posición del mismo sobre la recta.

Dado sobre una recta un sistema de referencia,la distancia $\overline{AB}$ entre dos puntos A, B, de abscisas respectivamente iguales a a y b, está dada por la diferencia de abscisas, $\overline{AB} = b - a$ en tanto se considere $b > a$.

```
      1  2  3  4
 ___________________________
   0 A        B            x
```

$$\overline{AB} = 4-1 = 3$$

```
 -2  -1     1  2  3  4
 ___________________________
        0         B       x
 A
```

$$\overline{AB} = 4-(-2) = 4+2 = 6$$

Hasta ahora hemos considerado en forma individual a los distintos puntos sobre la recta x. Cuando se hable en forma genérica del conjunto de todos ellos, se los designará bajo el nombre de valores de la variable x. Así los valores que puede tomar la variable x en el caso anterior, son los de los números reales. Estos valores que pueden tomar la variable reciben el nombre dé campo de variabilidad de la misma. Se pueden considerar igualmente variables cuyo campo de variabilidad sea por ejemplo el de los números naturales.

Se dirá para estos dos casos particulares, que corresponden respectivamente a una variable contínua y a otra discontínua.

33.- FUNCIONES:

Si se tiene una variable x, susceptible de tomar diversos valores, y se supone que al variar la x, varía en forma correspondiente otra variable, y, tal que a cada valor de x corresponda un determinado valor de y, se dirá que y es función de x, escribiendo tal relación mediante el símbolo $y = f(x)$, que se lee y igual a función de x.

Una función puede conocerse en base a mediciones, determinando una correspondencia entre pares de valores, o puede también conocerse en modo analítico o algebraico, fijando el operador que gobierna la forma de la $f(x)$.

Así por ejemplo la función

$$y = 2x + 3$$

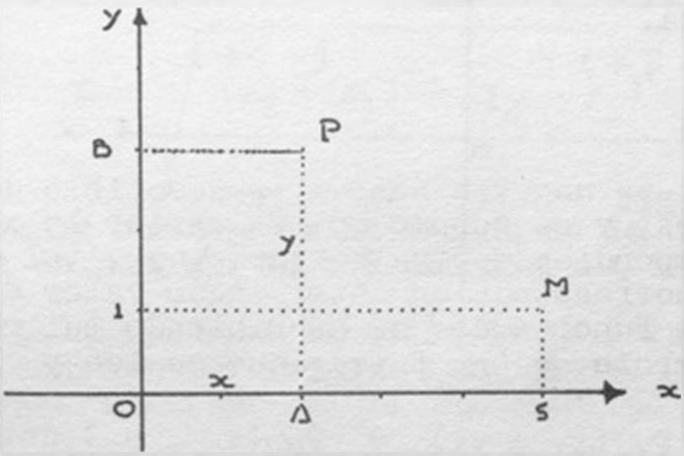
define a la y como una función de primer grado en la variable x.

34.- COORDENADAS CARTESIANAS EN EL PLANO.

Consideremos sobre un plano dos ejes perpendiculares, a los que designamos según: eje de la variable x, y eje de la variable y. Consideremos además para los mismos, un origen común O, dado por la intersección de los dos ejes, una unidad de medida común a ambos ejes y un sentido positivo para cada uno de ellos.

Se acostumbra trazar el eje x en dirección horizontal y con su sentido positivo hacia la derecha, el eje y en dirección vertical y con su sentido positivo hacia arriba.

Si por un punto P del plano, trazamos dos direcciones respectivamente paralelas a los ejes x e y, queda determinado un rectángulo que tiene por vértices el origen, el punto P, y las intersecciones de los ejes con las rectas trazadas.

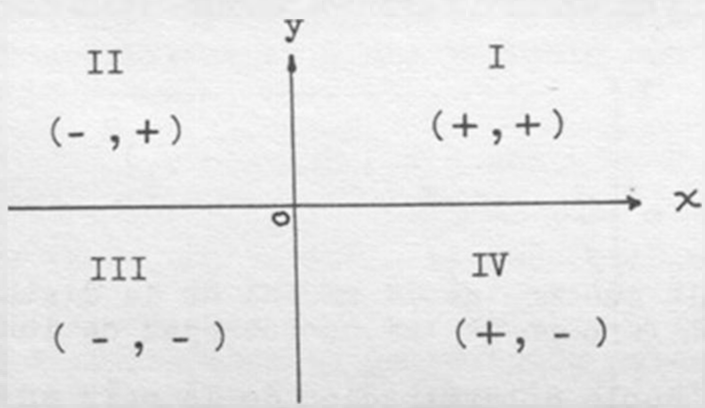


El segmento $\overline{BP}$ igual al $\overline{OA}$ mide la distancia del punto P al eje de la variable y. El segmento $\overline{BO}$ igual al

$\overline{AP}$ mide la distancia de P al eje de la variable x. A la medida del segmento $\overline{OA}$ que designamos con x, la llamaremos abscisa del punto P; y a la medida del segmento $\overline{AP}$ que designamos con y, la llamaremos ordenada del punto P. El nombre genérico para estas dos características de un punto: abscisa y ordenada, es el de coordenadas del punto. Se tiene así que, dado un punto P del plano, le corresponderán dos coordenadas x e y ; recíprocamente dado un par de valores, x e y , referidos a un sistema de coordenadas cartesianas, existirá un punto P del plano que los tenga por abscisa y ordenada respectivamente.

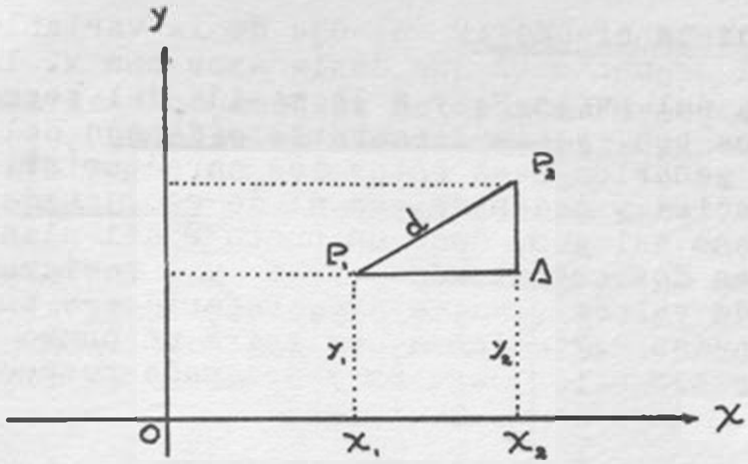
Para indicar un punto P que tenga por abscisa el valor 2 y por ordenada el valor 3, se emplea la notación P (2,3) denotando siempre las coordenadas de P en tal orden, primero la abscisa y luego la ordenada. Recíprocamente si nos referimos a un punto M (5,1), la representación del mismo en el anterior sistema de ejes, deberá efectuarse considerando un desplazamiento horizontal positivo de 5 unidades y luego un desplazamiento vertical positivo de una unidad.

El sistema de ejes coordenados ortogonales divide al plano en 4 cuadrantes, a los que corresponden puntos cuyas coordenadas tienen los signos que muestra el siguiente esquema.



35.- DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS:

Dados P_1 (x_1 , y_1) y P_2 (x_2 , y_2), determinar la distancia $d = \overline{P_1 P_2}$



Observemos el triángulo $P_1 P_2 A$, rectángulo en A. En virtud del teorema de Pitágoras se tiene:

$$\overline{P_1 \quad P_2}^{\,2} = \overline{P_1 \quad A}^{\,2} + \overline{A\, P_2}^{\,2}$$

que expresado en términos de los datos del problema se escribirá:

$$d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^a$$

resultando:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Fórmula que nos da la medida de la distancia entre dos puntos en función de las coordenadas de los mismos.

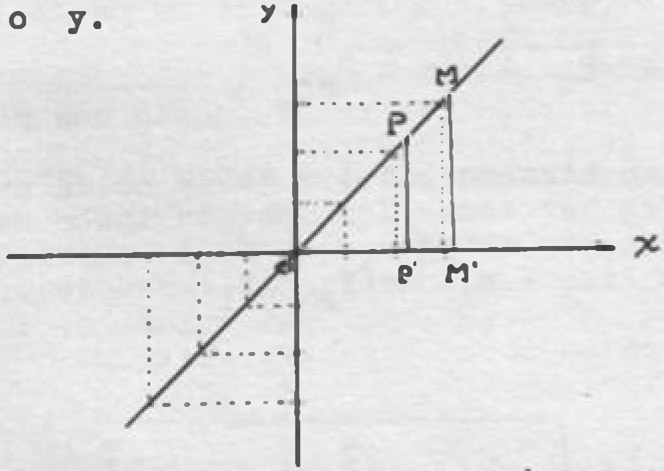
De la doble determinación de la raíz en cuanto al signo, se considerará siempre la positiva, por tratarse la distancia entre dos puntos de una magnitud esencialmente positiva.

36.- ECUACION DE LA RECTA.

Si representamos en un sistema de ejes coordenados los puntos de la siguiente tabla de valores

x	y
-3	-3
-2	-2
-1	-1
0	0
1	1
2	2
3	3

observamos que los mismos caen sobre la bisectriz del ángulo x o y.



Todos los puntos del plano que están sobre tal línea tienen la propiedad de tener abscisas y ordenadas iguales en magnitud y signo. En consecuencia la condición que soportan los mismos estará expresada por la siguiente ecuación $y = x$.

Consideremos un punto cualquiera sobre la bisectriz por ejemplo P (x,y), tracemos por P una paralela al eje y , denotemos con P' la intersección de dicha paralela con el eje de las x, y observemos en el triángulo OPP', rectángulo en P' , la relación entre sus dos catetos

$$\frac{PP'}{OP'}$$

Si se modifica la posición del punto P se podrá considerar un nuevo triángulo, semejante al OPP'. Sea éste, por ejemplo, el OMM'. Consideremos en éste la relación entre los dos catetos $\frac{MM'}{OM'}$; las dos relaciones anteriores son iguales, ya que por ser OPP' y OMM' triángulos semejantes, se cumplirá la propiedad que dice: "en triángulos semejantes los lados homólogos son proporcionales". Como consecuencia de ésta se tiene

$$\frac{PP'}{MM'} = \frac{OP'}{OM'}$$

y su consecuencia

$$\frac{PP'}{OP'} = \frac{MM'}{OM'}$$

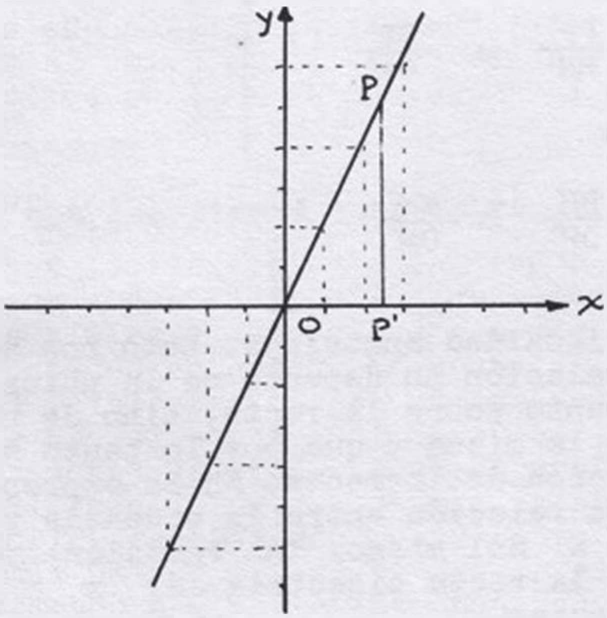
que demuestra la igualdad enunciada. Esto nos muestra que el valor de tal relación no depende de la ubicación que le asignamos al punto sobre la recta, sino de una característica propia de la misma y que por lo tanto estará contenida en la ecuación de la recta. En la expresión anterior se estudia la relación entre la ordenada y, de un punto, y la abscisa x del mismo. Tal relación, despejada de la ecuación de la recta bisectriz del x o y : $y = x$, nos conduce a expresar

$$\frac{y}{x} = 1$$

que nos da el valor de la relación anterior para la recta de ecuación $y = x$.

Consideremos la función $y = 2x$; una valorización conveniente y la representación gráfica de los correspondientes puntos, nos muestra que corresponde a una recta que pasa por el origen, pero que forma con el sentido positivo del eje de las x un ángulo mayor que el originado por la recta de ecuación $y = x$.

x	y
-3	-6
-2	-4
-1	-2
0	0
1	2
2	4
3	6



Si consideramos un punto P sobre la misma, se tendrá, proyectado éste sobre el eje de las x , y considerando este punto P , el origen, y el punto P' como vertices de un triángulo, habremos formado el OPP' rectángulo en P' . Consideremos en él la relación

$$\frac{PP'}{OP'}$$

Por lo expuesto en el punto anterior, el valor de este cociente, que mide la relación entre la ordenada y la absci sa de un punto de la recta, no depende del punto considerado sino que es una relación invariante, propia de la recta. Si en la ecuación $y = 2x$ formamos la relación anterior, se tendrá:

$$\frac{y}{x} = 2$$

En general la ecuación de una recta cualquiera, que pase el origen será $y = bx$, en donde b (coeficiente angular) expresa la relación que existe entre la ordenada de un punto de la misma y su correspondiente abscisa. Empleando términos de la trigonometría, diremos que el coeficiente de x en la ecuación de la recta, mide la tangente del ángulo que forma la recta con el sentido positivo del eje de las x.

Consideremos la función $y = 2 + x$, que es un caso particular de la más general de este mismo tipo: $y = a + x$. Una conveniente valorización, seguida de la correspondiente representación gráfica, nos muestra que esta función corresponde a una recta, paralela a la bisectriz del $x\,o\,y$, situada dos unidades por encima de la misma. La significación de a es inmediata. Para $x = o$ resulta: $y = a$, es decir indica que la recta pasa por el punto de coordenadas (o,a). Por tal razón recibe el nombre de ordenada al origen. Un valor positivo de la misma indica que la recta tiene una ordenada al origen positiva, es decir corta al eje de las y en su semieje positivo. Similarmente una ordenada al origen negativa, corresponde a una recta que corta al eje de las y en su semieje negativo.

En general $y = a + bx$ representa la ecuación de una recta cualquiera, en donde a y b, parámetros de la misma, tienen la significación vista. Cuando se asignan a los mismos valores determinados, lo que se hace es particularizar, individualizando una de toda una familia de infinitas rectas representadas por la ecuación

$$y = 3 + \tfrac{1}{2}x$$

Representación gráfica de algunas rectas:

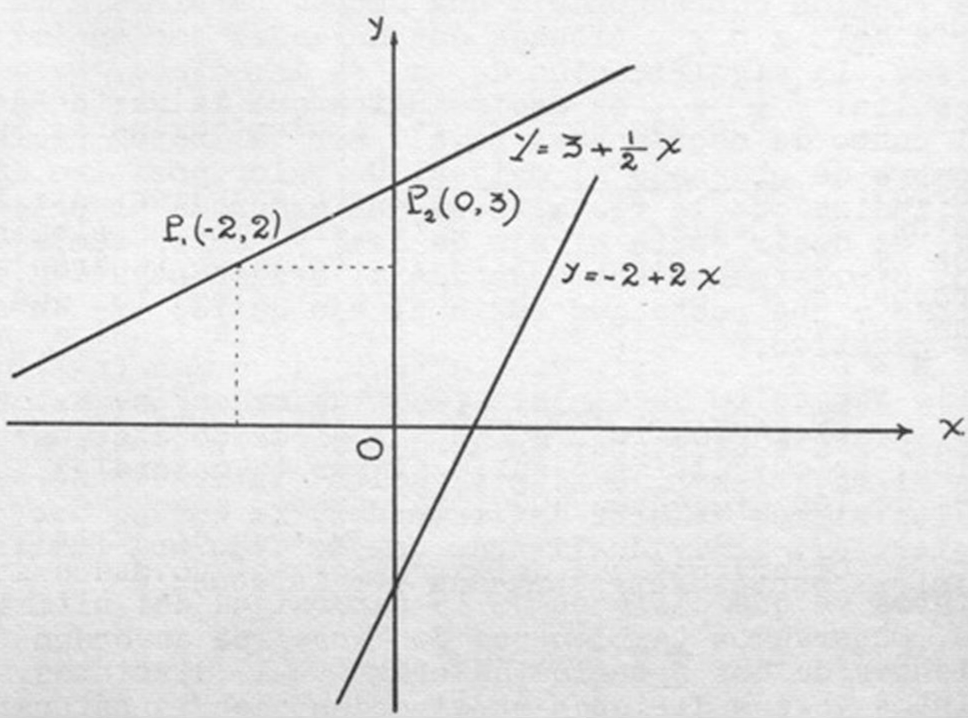
Consideremos por ejemplo la recta de ecuación

$$y = 3 + \frac{1}{2}x$$

Para conocer la gráfica representativa de la recta correspondiente a esta ecuación, bastará con determinar dos puntos de la misma, ya que por geometría sabemos que por dos puntos cualesquiera pasa una sola recta. Para determinar dos puntos cualesquiera de la misma, damos dos valores arbitrarios a la variable x, obteniendo dos valores correspondientes para la variable y; resultará, considerando por ejemplo una valorización en los puntos -2 y 0, la siguiente esquematización:

x	y
-2	2
0	3

que nos permite llegar a la representación buscada



En general puede resultar conveniente indicar la función a la cual corresponde la linea trazada sobre el plano de referencia. Esto resulta especialmente útil cuando sobre un mismo sistema de referencia se representan dos o más funciones. Si por ejemplo queremos representar en el mismo sistema la recta de ecuación $y = -2+2x$ esta indicación permitirá un reconocimiento posterior de la función.

ANALISIS COMBINATORIO

37.- ARREGLOS:

i) Definición: Dados m objetos distintos, llamaremos ARREGLOS de orden n de estos m objetos, a todo grupo de n objetos cualesquiera tomados de estos m, considerando como distintos a dos grupos, cuando se diferencien en la naturaleza de los elementos que los forman, o si están formados por los mismo elementos, cuando difieran en el orden de colocación de los mismos.

Denotaremos con $A_{m,n}$ a los arreglos de m objetos tomados de a n.

ii) Formación del número de Arreglos. Para formar los $A_{m,n}$ procederemos de la siguiente manera: Supongamos formados todos los $A_{m,(n-1)}$ correspondientes a los m objetos. Si a cada grupo le agregamos un elemento de los m, que no figure entre los $(n-1)$, se tendrán entonces grupos de n objetos. El número de elementos que no figuran en cada arreglo de orden $(n-1)$ será igual a $m-(n-1) = m-n+1$. Así, cada arreglo de orden $(n-1)$ da lugar a la formación de $m-n+1$ grupos de orden n. Estos grupos de n elementos formados con los m objetos, son arreglos, ya que difieren entre si por la naturaleza o el orden de los elementos que los forman.

Observamos que dos arreglos así formados son distintos ya que difieren en la naturaleza del último elemento. Observamos también que dos arreglos de orden n provenientes de dos arreglos de órden $(n-1)$ distintos, son distintos ya que difieren en el orden o en la naturaleza de los $(n-1)$ primeros elementos. Esto nos dice que no se repite ningún arreglo.

Ante el interrogativo de si hemos formados todos los arreglos, razonamos: escogiendo arbitrariamente un $A_{m,n}$, al quitarle el último elemento obtenemos un $A_{m,(n-1)}$ el cual está entre los que sirvieron de partida para la formación de los $A_{m,n}$. Como a éste le hemos agregado todos los posibles elementos restantes, resulta que entre los arreglos formados figura éste. Se han considerado así todos los $A_{m,n}$.

Corresponderá escribir por lo tanto:

$$A_{m,n} = A_{m,(n-1)} \times (m - n + 1)$$

iii) <u>Cálculo del número de Arreglos</u>. Es evidente que el número de arreglos de orden 1 que se puede formar con m objetos es m. Así, con los objetos a, b, c, d se pueden formar 4 arreglos de orden uno que son: a ; b ; c ; d. Se tiene así:

$$A_{m,1} = m$$

Aplicando a esta expresión la ecuación recurrente que aparece más arriba, se tiene el número de Arreglos de orden 2 que se pueden formar con m elementos. Así:

$$A_{m,2} = A_{m,1} \cdot (m-1) = m\,(m-1)$$

y similarmente el número de arreglos de orden 3 estará dado por

$$A_{m,3} = A_{m,2} \cdot (m-2) = m\,(m-1)\,(m-2)$$

Sin más, se observa que el número de arreglos de m objetos tomados de n está dado por el producto de n factores decrecientes a partir de m. La expresión que nos dará entonces el número de arreglos será:

$$\boxed{A_{m,n} = m\,(m-1)\,(m-2)\,\ldots\,(m-n+1)}$$

EJERCITACION:

Con los elementos a , b , c , d formar los correspondiente arreglos monarios, binarios, ternarios y cuaternarios. Para ésto seguiremos el camino ya recorrido cuando determinamos el número de arreglos distintos que se podían formar con m objetos tomados en grupos de n . Comenzaremos así formando los arreglos de orden 1 , una vez obtenidos éstos le agregaremos a cada uno de ellos un elemento de los m que no figura entre los ya considerados. Obtenidos de esta manera los arreglos binarios, la aplicación de este mismo método nos conduce a la formación de los ternarios y así hasta completar.

$A_{4,1} = 4$ Los correspondientes arreglos son:

a , b , c , d

$A_{4,2} = 4 \times 3 = 12$; siendo los correspondientes arreglos:

a b	b a	c a	d a
a c	b c	c b	d b
a d	b d	c d	d c

$A_{4,3} = 4 \times 3 \times 2 = 24$; siendo los correspondientes arreglos:

a b c	b a c	c a b	d a b
a b d	b a d	c a d	d a c
a c b	b c a	c b a	d b a
a c d	b c d	c b d	d b c
a d b	b d a	c d a	d c a
a d c	b d c	c d b	d c b

$A_{4,4} = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$; los correspondientes arreglos son:

a b c d	b a c d	c a b d	d a b c
a b d c	b a d c	c a d b	d a c b
a c d b	b c a d	c b a d	d b a c
a c d b	b c d a	c b d a	d b c a
a d b c	b d a c	c d a b	d c a b
a d c b	d b c a	c d b a	d c b a

38.- PERMUTACIONES:

1) Los $A_{m,m}$ ó sea las distintas disposiciones que puede presentar un grupo de m objetos tomados en conjunto, reciben el nombre de PERMUTACIONES. Así se tendrá que dos permutaciones, por estar formadas por los mismos elementos diferirán exclusivamente por el orden de colocación de los mismos. Para el cálculo del número de permutaciones distintas que se pueden formar con m objetos, se aplica la fórmula que da el número de Arreglos, en donde se asigna a n el valor m . Se tiene así:

$$A_{m,m} = m\,(m-1)\,(m-2)\,\ldots\,(m-m+1)$$

$$A_{m,m} = m\,(m-1)\,(m-2)\,\ldots\,1 = m\,!$$

En donde con m ! designamos el producto de todos los factores enteros comprendidos entre uno y m .

Denotando con P_m a las permutaciones de m objetos se tendrá:

$$\boxed{P_m = m\,(m-1)\,(m-2)\,\ldots\,1 = m\,!}$$

$$\boxed{C_{m,n} = \frac{A_{m,n}}{P_n}}$$

Aplicando las fórmulas conocidas para el número de arreglos y de permutaciones se tendrá:

$$C_{m,n} = \frac{m\,(m-1)\,(m-2)\,\ldots\,(m-n+1)}{n\,!}$$

En el numerador de esta expresión figuran n factores decrecientes desde m hasta $m-n+1$. Sabemos que al multiplicar numerador y denominador de una expresión por una misma cantidad, el valor de la expresión no altera. Eligiendo esta cantidad igual a $(m-n)!$ se tendrá:

$$C_{m,n} = \frac{m\,(m-1)\,(m-2)\,.\,.\,.\,(m-n+1)\,(m-n)\,!}{(m-n)\,!\;\;n!}$$

de donde resulta la fórmula final

$$\boxed{C_{m,n} = \frac{m!}{(m-n)!\;\;n!}}$$

Para que esta fórmula sea más general se conviene en asignar a $0!$ el valor 1, resultando así como caso particular

$$C_{m,m} = \frac{m!}{0!\;\;m!} = 1$$

iii) <u>Formación de las combinaciones</u>. Para formar las combinaciones n-arias de un grupo de m objetos, su puestos dispuestos en una forma determinada, se consideran ya formadas las combinaciones de orden $n-1$ de esos mismos m elementos, y se procede a agregar a estos grupos aquellos elementos de los m, que no figuran en los grupos y se encuentran a la derecha de los elementos ya considerados. Para llegar así a las combinaciones n-arias, se comenzará por las unitarias, binarias, ternarias, etc., hasta llegar a las de orden n.

iv) Números combinatorios complementarios. Un número combinatorio en su forma Euleriana

$$C_{m,n} = \binom{m}{n}$$

admite para m y n las denominaciones de numerador y denominador respectivamente.

Diremos que dos números combinatorios son complementarios, cuando teniendo un mismo numerador, sus denominadores son complementarios; o sea, la suma de los mismos es igual al numerador común.

Diremos que dos números combinatorios complementarios son iguales, es decir

$$\binom{m}{m-n} = \binom{m}{n}$$

En efecto, desarrollando cada uno de ellos se tiene:

$$\binom{m}{n} = \frac{m!}{(m-n)!\ n!} \quad \text{y} \quad \binom{m}{m-n} = \frac{m!}{[m-(m-n)]!\,(m-n)!} =$$

$$= \frac{m!}{m!\ (m-n)!}$$

Como los segundos miembros son iguales, lo serán los primeros, quedando en consecuencia demostrado nuestro teorema.

40.- PERMUTACIONES CON REPETICION:

Hasta ahora hemos supuesto que todos los m elementos de nuestro grupo, eran distintos; es decir no habíamos considerado el caso de un elemento o varios que se repitieran un cierto número de veces. Supongamos tener los siguientes m objetos:

$$a_1 , a_2 , \dots , a_j , \dots , a_m$$

de los cuales $a_1, a_2, \dots, a_{j-1} , a_j$, en número de j son iguales entre sí, siendo $a_{j+1} , \dots , a_m$, en número de $m-j$, distintos.

Si por un momento consideramos distintos a todos los a_i (designando con a_i a un elemento genérico de los m que forman nuestro grupo) sabemos que el número de permutaciones que podemos formar con dichos elementos es igual a $P_m = m!$

Si en una de estas permutaciones consideramos ahora los elementos $a_1, a_2, \dots , a_{j-1}, a_j$, y los permutamos en todas las formas posibles sin alterar la colocación de los demás elementos, obtendremos $j!$ permutaciones distintas, ya que dos de ellas difieren en el orden de estos j elementos.

Si los elementos $a_1, a_2, \dots, a_{j-1}, a_j$, son todos iguales, repitiéndose j veces en lugares distintos, las $j!$ permutaciones de cada grupo son una misma.

Introduciendo para el número de permutaciones de m elementos, de los cuales j son iguales entre sí, la simbología P_m^j , resulta inmediato

$$\boxed{P_m^j = \frac{m\,!}{j\,!}}$$

OBSERVACION: Se demuestra facilmente que si entre los m elementos hay por una parte, j elementos iguales entre si, y k elementos iguales entre si, el número de permutaciones distintas que se puede formar con dichos elementos estara dado por:

$$P_m^{j,k} = \frac{m\,!}{j!\ k!}$$

POTENCIA DE BINOMIOS Y POLINOMIOS

41.- PRODUCTOS DE BINOMIOS:

Consideremos el producto de los binomios:

$$(a+b_1)\ (a+b_2)\ (a+b_3)\ \ldots\ (a+b_m)$$

Si al efectuar el producto sacamos factor común las distintas potencias de a, que figuran en cada suma parcial, se tendrá:

$$(a+b_1)\ (a+b_2)\ \ldots(a+b_m) =$$

$$a^m + a^{m-1}\ S_1 + a^{m-2}\ S_2 + a^{m-3}\ S_3 + \ldots + a\ S_{m-1} + S_m$$

en donde: S_1, S_2, ... , S_m, suma de los productos monarios, binarios, ... , m-arios, son respectivamente iguales a

$$S_1 = b_1 + b_2 + \ldots + b_m$$

$$S_2 = b_1\ b_2 + b_1\ b_3 + \ldots + b_1 b_m + b_2 b_3 + \ldots + b_{m-1}\ b_m$$

$$S_3 = b_1\, b_2\, b_3 + b_1\, b_2\, b_4 + \cdots + b_{m-2}\, b_{m-1}\, b_m$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$S_m = b_1\, b_2 \ldots b_m$$

42.- POTENCIA DE UN BINOMIO:

Si en el desarrollo anterior consideramos $b_1 = b_2 = b_3 = \ldots = b_m = b$, se observará que todos los términos de S_1 son iguales a b ; todos los términos de S_2 son iguales a b^2 , ... , todos los términos de S_{m-1} son iguales a b^{m-1} , y el único término de S_m es igual a b^m .

Bastará contar entonces, el número de términos de cada suma de productos monarios, binarios etc, para poder escribir la fórmula que da el desarrollo de la potencia de un binomio.

S_1 , la primer suma, tiene $\binom{m}{1}$ términos

S_2 , la segunda suma tiene $\binom{m}{2}$ términos

$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$

S_k, la k-ésima suma tiene $\binom{m}{k}$ términos

$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$

S_m , la m-ésima suma tiene $\binom{m}{m}$ términos

Resulta así:

$$(a+b)^m = a^m + a^{m-1}\binom{m}{1} b + a^{m-2}\binom{m}{2} b^2 + \dots$$

$$\dots + a^2\binom{m}{m-2} b^{m-2} + a\binom{m}{m-1} b + \binom{m}{m} b^m$$

en donde, como ya es familiar, hemos designado con $\binom{m}{k}$ al número de combinaciones distintas que se pueden formar con m elementos tomados en grupos de k .

Si observamos el término general del segundo miembro:

$$a^{m-j}\binom{m}{j} b^j$$

podremos escribir en formar más condensada a todos los términos de dicho segundo miembro. La notación de sumatoria nos provee dicha forma más condensada. Resulta así:

$$\boxed{(a+b)^m = \sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} a^{m-j} b^j}$$

que se lee: suma de los productos dados por las combinaciones de m de orden j , por a elevado a la potencia $m - j$ por b elevado a la potencia j , j variando des de cero hasta m .

La fórmula anterior recibe el nombre de fórmula de Newton para el desarrollo de la potencia de un binomio, y eventualmente, binomio de Newton.

En relación al cálculo de los coeficientes combina torios de la fórmula de Newton se observa:

$$\binom{m}{j} = \frac{m\,(m-1)\,\dots\,(m-j+1)}{1 \times 2 \times \dots \times j}$$

El coeficiente combinatorio siguiente, $\binom{m}{j+1}$ es:

$$\binom{m}{j+1} = \frac{m\,(m-1)\,\ldots\,(m-j+1)\,(m-j)}{1\;2\;\ldots\;j\;(j+1)}$$

Una simple inspección permitirá observar que una vez calculado uno de los coeficientes, es posible obtener el siguiente, multiplicando el anterior por (m-j) (que es el exponente de a en el término anterior) y dividiéndolo por (j+1) que es el exponente de b aumentado en una unidad.

Otra de las propiedades que facilita el cálculo numérico de los coeficientes combinatorios, es la aplicación del teorema por el que demostrábamos que dos números combinatorios complementarios (es decir de iguales numeradores y de denominadores tales que su suma restituya el numerador común) son iguales. Resultará como consecuencia de esta propiedad que los coeficientes combinatorios de los términos que equidistan de los extremos del desarrollo, son iguales. Gracias a esta simetría será necesario calcular tan solo la mitad de los coeficientes combinatorios, ya que en los demás se repetirán los mismos valores.

Los sucesivos términos del desarrollo de la potencia m-ésima de un polinomio, se obtienen asignando sucesivamente a j los valores 0 , 1 , , .. , (m-1), m .

Así se tiene para: $(a+b)^m = \sum_{j=o}^{m} \binom{m}{j} a^{m-j}\, b^j$

$$j = 0 : \binom{m}{0}\; a^{m-o}\; b^o = 1 \,.\, a^m \,.\, 1 = a^m$$

$$j = 1 : \binom{m}{1}\; a^{m-1}\; b^1 = m \,.\, a^{m-1} \,.\, b = m\; a^{m-1}\, b$$

$$j = 2 : \binom{m}{2}\; a^{m-2}\; b^2 = \frac{m\,(m-1)}{2\,!} \,.\, a^{m-2} \,.\, b^2$$

$$j = 3 \quad : \quad \binom{m}{3} a^{m-3} \; b^3 = \frac{m\,(m-1)\,(m-2)}{3!} \cdot a^{--3} \cdot b^3$$

$$j = 4 \quad : \quad \binom{m}{4} a^{m-4} \; b^4 = \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{4!} \cdot a^{m-4} \cdot b^4$$

$$j = 5 \quad : \quad \binom{m}{5} a^{m-5} \; b^5 = \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)}{4!} a^{m-5}$$

. . . .

. . . .

. . . .

$$j = (m-1): \quad \binom{m}{m-1} a^1 \; b^{m-1} = \frac{m(m-1) \; . \; . \; . \; (m-m\;2)}{(m-1)} a \; b^{m-1}$$

$$j = m \quad : \quad \binom{m}{m} a^0 \; b^m = \frac{m\,!}{m\,!} \; b^m = b^m$$

Resultando finalmente:

$$(a+b)^m = a^m + m \; a^{m-1} \; b + \frac{m\,(m-1)}{2\,!} \; a^{m-2} \; b^2 + \ldots$$

$$+ \frac{m\,(m-m)\,\ldots\,(m-m+2)}{(m-1)!} \; a \; b^{m-1} + b^m$$

<u>EJERCICIO</u>:

Desarrollar la siguiente potencia de binomio

$$(x + y)^5 = \sum_{j=o}^{5} \binom{5}{j} x^{5-j} \; y^j$$

Valorizando sucesivamente los distintos términos de la sumatoria se tendrá, para:

$$j = 0 \;:\; \binom{5}{0} x^5 y^0 = x^5$$

$$j = 1 \;:\; \binom{5}{1} x^{5-1} \; y^1 = 5\, x^4\, y$$

$$j = 2 \;:\; \binom{5}{2} x^{5-2} \; y^2 = 10\, x^3\, y^2$$

$$j = 3 \;:\; \binom{5}{3} x^{5-3} \; y^3 = 10\, x^2\, y^3$$

$$j = 4 \;:\; \binom{5}{4} x^{5-4} \; y^4 = 5\, x \; y^4$$

$$j = 5 \;:\; \binom{5}{5} x^{5-5} \; y^5 = y^5$$

se tendrá:

$$(x+y)^5 = x^5 + 5\, x^4\, y + 10\, x^3\, y^2 + 10\, x^2\, y^3 + 5\, x\, y^4 + y^5$$

43.- <u>POTENCIA DE UN POLINOMIO</u>:

Aceptaremos sin demostrarla, la validez de la fórmula de Leibnitz para el desarrollo de la potencia de un polinomio. Esta nos dice:

$$(a + b + \overbrace{\cdots}^{i} + n)^m = \sum^{m} \frac{m}{\alpha!\,\beta!\cdots\lambda!} \; a^{\alpha}\, b^{\beta} \ldots n$$

$$\alpha + \beta + \cdots + \lambda = 0$$

$$\alpha, \beta, \cdots, \lambda = 0$$

Mostraremos que la fórmula de Newton para el desarrollo de la potencia m-ésima de un binomio es un caso particular de ésta. En efecto, considerando en la anterior tan solo los términos a y b se tendrá:

$$(a+b)^m = \sum^{m} \frac{m!}{\alpha!\,\beta!} a^{\alpha} b^{\beta}$$

$$\alpha + \beta = m$$

$$\alpha, \beta = 0$$

Si en la fórmula anterior, hacemos $\alpha = m - \beta$, (esta sustitución no es arbitraria, ya que está implícita en la condición que soportan α y β), y sustituimos en la misma, α por tal valor, se tendrá:

$$(a+b)^m = \sum_{\beta=0}^{m} \frac{m}{(m-\beta)!\,\beta!} a^{m-\beta} b^{\beta}$$

que no es otro que el desarrollo dado por la fórmula de Newton para la potencia de un binomio, ya que

$$\frac{m!}{(m-\beta)!\,\beta!} = \binom{m}{\beta}$$

EJERCITACION:

Desarrollar la potencia quinta del polinomio (a+b+c) aplicando la fórmula de Leibnitz.

Se tendrá entonces:

$$(a+b+c)^5 = \sum^{5}_{\substack{\alpha+\beta+\gamma=5 \\ \alpha,\beta,\gamma=0}} \frac{5!}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!} x^{\alpha} y^{\beta} z^{\gamma}$$

en cada uno de los términos de este desarrollo se observa que la suma de los exponentes de x , y , z , es decir $\alpha + \beta + \gamma$ es igual al orden de la potencia del polinomio, es decir 5 . Los distintos valores que habrán de tomar los exponentes: α, β, γ al variar desde cero hasta cinco, estarán dados según las distintas maneras de descomponer el número 5 (orden de la potencia) en tres sumandos (ya que se trata de un trinomio). Estas son:

$$5 + 0 + 0 = 5$$
$$4 + 1 + 0 = 5$$
$$3 + 2 + 0 = 5$$
$$3 + 1 + 1 = 5$$
$$2 + 2 + 1 = 5$$

debiendo permutar en cada una de estas descomposiciones el orden de presentación. Es decir, permutando los números anteriores se tendrán formadas las ternas de valores que corresponden a $\alpha . \beta . \gamma$ del desarrollo propuesto. Obteniendo finalmente.

$$(x+y+z)^5 = x^5 + y^5 + z^5 +$$

$$+ \frac{5!}{4!\ 1!\ 0!} (x^4y + x^4z + y^4x + y^4z + z^4x + z^4y) +$$

$$+ \frac{5!}{3!\ 2!\ 0!} (x^3y^2 + x^3z^2 + y^3x^2 + y^3z^2 + z^3x^2 + z^3y^2) +$$

$$+ \frac{5!}{3!\ 1!\ 1!} (x^3y\ z + y^3x\ z + z^3x\ y\ ) +$$

$$+ \frac{5!}{2!\ 2!\ 1!} (x^2y^2z + y^2z^2x + x^2z^2y\ )$$

44.- ECUACIONES:

Podemos decir que el álgebra resuelve el problema de determinar uno o varios números que cumplan condiciones, capaces de ser expresadas por medio de igualdades. Estas igualdades que satisfacen los números buscados, se denominan ecuaciones, llamándose raiz o solución de las mismas al número que cumple la condición de dar igual valor numérico a ambos miembros de la igualdad.

De los tres pasos que involucra un problema de ecuaciones: planteamiento, cálculo de las raíces o soluciones, e interpretación, trataremos mayormente en estas líneas el segundo, sin perjuicio de considerar alguna aplicación a las ciencias estadísticas de donde se enfoque el problema completo.

Se dirá que dos ecuaciones son equivalentes cuando toda solución de una satisface a la otra. Muy frecuentemente en la resolución de nuestros problemas de ecuaciones habremos de transformar ecuaciones dadas en otras equivalentes, más faciles de resolver, para lo que apelaremos a las siguientes propiedades:

I) Si se suma a ambos miembros de una ecuación un mismo número, se obtiene una ecuación equivalente.

II) Si se pasan todos los términos de un miembro a otro con el signo contrario, se obtiene una ecuación equivalentes.

III) Si se multiplica ambos miembros de una ecuación por un número h, distinto de cero, se obtiene una ecuación equivalente.

IV) Si se eleva a una misma potencia ambos miembros de una ecuación, se obtiene otra, equivalente de la primera.

45.- SISTEMAS DE ECUACIONES SIMULTÁNEAS.

Cuando las condiciones que deben cumplir ciertos números se expresan mediante dos ó más ecuaciones que deben ser satisfechas simultáneamente por los mismos, se estará ante un sistema de ecuaciones. Se pedirá para resolver el sistema, determinar todo aquel conjunto de valores simultáneos de varias incognitas, que satisfagan el sistema. Se dirá así que este conjunto de valores constituye una solución del sistema.

Puede ocurrir que un sistema no admita solución, en cuyo caso se dirá incompatible; o que admita por el contrario infinitas soluciones, en cuyo caso se dirá indeterminado.

Propiedades y definiciones.

Si toda solución de un sistema de ecuaciones satisface a otra ecuación, se dirá que esta última es consecuencia de las primeras.

Si una ecuación es combinación lineal de varias de un sistema, o sea, resulta de sumarlas miembro a miembro, previamente multiplicados por números cualesquiera, resultará consecuencia de las anteriores.

Si en un sistema hay una ecuación que es combinación lineal de las demás, puede suprimirse sin alterar las soluciones del mismo. Se dice que en una ecuación consecuencia de un sistema, se ha eliminado una incógnita, cuando en ella no figura una determinada incognita de las anteriores.

46.- RESOLUCION DE UN SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES.

Consideremos para fijar las ideas un sistema de dos ecuaciones simultáneas con dos incógnitas

$$\begin{array}{ll} (i) & \left| \begin{array}{l} a_1 \ x + b_1 \ y = c_1 \\ a_2 \ x + b_2 \ y = c_2 \end{array} \right. \\ (ii) & \end{array}$$

en donde a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2, números cualesquiera, son los parámetros del sistema; y las letras x, y, las incógnitas.

Resolver el anterior sistema significa encontrar uno o más pares de valores x, y, que satisfagan simultaneamente las dos ecuaciones del sistema. Para ésto presentamos los siguientes métodos:

Eliminación por igualación.

Despejando una cualquiera de las incógnitas, por ejemplo la x, de ambas ecuaciones del sistema, se tiene:

de (i) : $$x = \frac{c_1 - b_1 y}{a_1} \quad \text{(iii)}$$

de (ii) $$x = \frac{c_2 - b_2 y}{a_2} \quad \text{(iv)}$$

igualando ahora los segundos miembros, se tendrá una ecuación consecuencia, en donde se ha eliminado la incógnita x.

$$\frac{c_1 - b_1 y}{a_1} = \frac{c_2 - b_2 y}{a_2}$$

que es una ecuación lineal en y, siendo su solución:

$$y = \frac{c_2 a_1 - c_1 a_2}{b_2 a_1 - b_1 a_a}$$

sustituyendo este valor de y en (iii) o en (iv), hallamos el correspodiente valor de x, obteniendo así la solución del sistema.

$$x = \frac{b_2\ c_1 - b_1 c_2}{b_2\ a_1 - b_1 a_2}$$

En los problemas numéricos convendrá verificar las soluciones, sustituyendo los valores encontrados, en las ecuaciones del sistema.

Eliminación por sustitución.

Despejando una cualquiera de las incognitas, la x por ejemplo, de una cualquiera de las ecuaciones del sistema (1), la (i) por ejemplo, se tiene:

$$x = \frac{c_1 - b_1 y}{a_1}$$

sustituyendo esta expresión de x, en la (ii), se llega a una ecuación consecuencia en donde se ha eliminado la x. Resolviendo ésta y sustituyendo su valor en la anterior, se habrá resuelto el sistema dado.

Los valores de x, y que se encuentran por sustitución, concuerdan naturalmente con los correspondientes al método de igualación.

Método de reducción o eliminación por suma y resta.

Este método es el más rapido y eficiente para resolver un sistema de n ecuaciones lineales con n incognitas, en el caso de operar con coeficientes numéricos.

Si, mediante este método, fuéramos a resolver una vez más el sistema anterior, se procedería de la siguiente manera:

Se multiplica la (i) por a_2, y la (ii) por a_1 (coeficientes de x en (i) y (ii) respectivamente) y se resta m.a.m. la (i) de la (ii). Se obtiene así una ecuación consecuencia, en donde se ha eliminado x. Resuelta ésta en y, y sustituyendo éste valor en (i) o (ii) se llegará al correspondiente valor de x que junto con el de la y, constituyen la solución del sistema.

Método gráfico para la solución de un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas.

Consideremos el siguiente sistema:

$$\begin{array}{l|l} \text{(i)} & a_1 x + b_1 y = c_1 \\ \\ \text{(ii)} & a_2 x + b_2 y = c_2 \end{array}$$

en donde tanto la (i) como la (ii) corresponden a la forma implícita de la ecuación de la recta. Encontrar la solución del sistema, o sea hallar aquel par de valores de x e y que satisfagan simultáneamente la (i) y la (ii), equivale a hallar las coordenadas del punto de intersección de las dos rectas.

Para representar gráficamente ambas rectas, puede resultar conveniente, dada la forma implícita de ambas ecuaciones, determinar primeramente los puntos de intersección de las mismas con los ejes orientados del sistema de referencia.

Así, poniendo en (i), ecuación de la recta r_1, $y = 0$, se tendrá : $x = \frac{c_1}{a_1}$, y luego $x = 0$ se tendrá

$y = \frac{c_1}{b_1}$, que son respectivamente las coordenadas de los

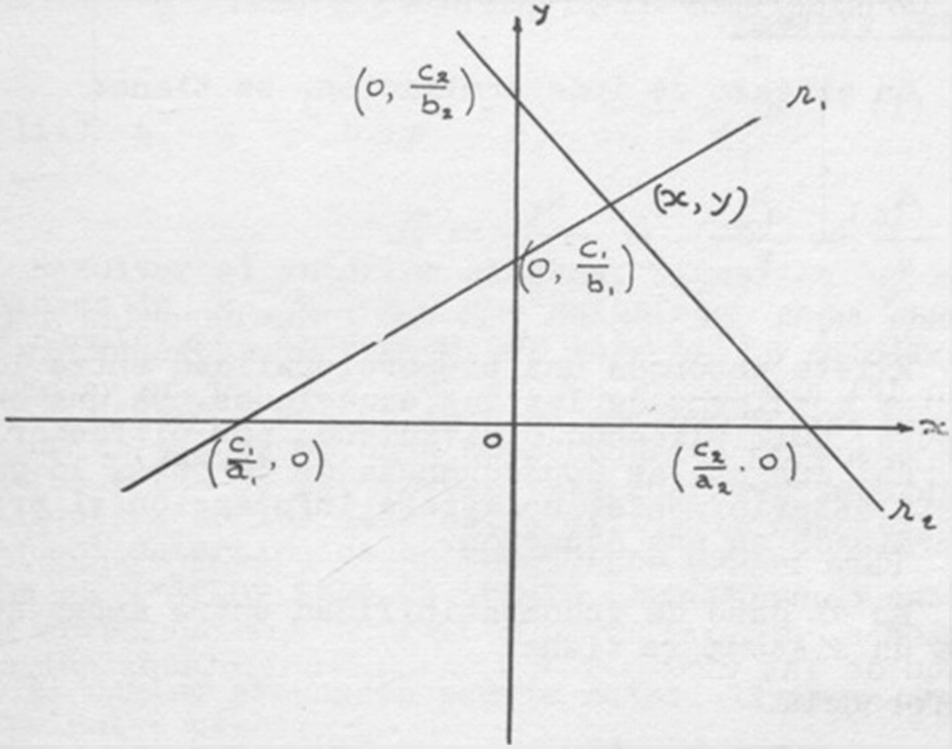
puntos de intersección de r_1 con el eje de las x y de las y.

Operando similarmente en la (ii), ecuación de r_2, se tendrá:

$$y = 0 \quad , \quad x = \frac{c_2}{a_2}$$

$$x = 0 \quad , \quad y = \frac{c_2}{b_2}$$

Con estos puntos podemos representar nuestras dos rectas, leyendo sobre el reticulado trazado sobre el sistema de referencia, las coordenadas del punto de intersección.



El método gráfico nos provee de un rápido instrumento de interpretación de un sistema de ecuaciones lineales con dos incognitas. Inmediatamente se comprende que los tres casos que podrían presentarse, a saber: determinación, incompatibilidad e indeterminación, responden geométricamente a las siguientes situaciones:

a) <u>Sistema determinado</u>: existe un par de valores que es solución del sistema, luego las rectas r_1 y r_2 se cortan en un punto.

b) <u>Sistema incompatible</u>: no existe ningún par de valores que satisfaga simultáneamente ambas ecuaciones, es decir no hay un punto propio de intersección; luego las rectas r_1 y r_2 serán paralelas.

c) Sistema indeterminado: no hay uno, sino infinitos pares de valores de x e y que satisfacen el sistema; o sea, las dos rectas se cortan en infinitos puntos, cosa que sólo puede ocurrir cuando ambas ecuaciones designan a una misma recta. En este caso se dirá que ambas ecuaciones son equivalentes.

Condiciones que soportan los coeficientes o parámetros del sistema.

En el caso de indeterminación, se tiene:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} = \lambda$$

Existe entonces una proporcionalidad entre los coeficientes homólogos de las dos ecuaciones. De una se pasa a la otra, multiplicando o dividiendo por el factor λ. Se ve, así que una es consecuencia de la otra, lo que por lo visto anteriormente, no agrega información al problema, indeterminado en una ecuación.

En el caso de incompatibilidad entre ambas ecuaciones de un sistema, se tiene:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$$

Existe entonces una proporcionalidad en cuanto a los coeficientes de x e y . Como de ellos depende la inclinación de la recta, tal condición muestra el mencionado paralelismo que actúa en estos casos.

A menos que se tenga la seguridad de estar frente a un sistema determinado, en la práctica resultará muy conveniente observar los parámetros del sistema en lo tocante a proporcionalidad, antes de ensayar cualquier método de resolución.

47.- SISTEMAS DE TRES ECUACIONES LINEALES CON TRES INCOGNITAS.-

$$\begin{cases} (i) & a_1 x + b_1 y + c_1 z = d_1 \\ (ii) & a_2 x + b_2 y + c_2 z = d_2 \\ (iii) & a_3 x + b_3 y + c_3 z = d_3 \end{cases}$$

Resolver el anterior sistema, significa encontrar los valores de x , y , z , que satisfagan simultaneamente las condiciones impuestas por (i), (ii) y (iii).

Un camino práctico será el de formar con las ecuaciones de (1), 2 ecuaciones consecuencia, en donde se haya eliminado una de las incógnitas, resolver este sistema por cualquiera de los métodos ya vistos, y sustituir los valores así determinados en cualquiera de las ecuaciones de (1). Resolviendo ésta se tendrá finalmente la solución del sistema.

El camino propuesto podría materializarse según los siguientes pasos:

Combinando (i) y (ii) formo una ecuación consecuencia, en donde elimino x .

Combinando ahora (i) y (iii) formo otra ecuación consecuencia, en donde también elimino x .

Sean éstas:

$$\begin{cases} (b_1 a_2 - b_2 a_1) y + (c_1 a_2 - c_2 a_1) z = d_1 a_2 - d_2 a_1 \\ (b_1 a_3 - b_3 a_1) y + (c_1 a_3 - c_3 a_1) z = d_1 a_3 - d_3 a_1 \end{cases}$$

que constituyen un sistema de dos ecuaciones con dos incognitas: y, z . Las soluciones del mismo estarán dadas por:

$$y = \frac{(d_1a_2 - d_2a_1)\,(c_1a_3 - c_3a_1) - (d_1a_3 - d_3a_1)(c_1a_2 - c_2\,a_1)}{(b_1a_2 - b_2a_1)\,(c_1a_3 - c_3a_1) - (b_1a_3 - b_3a_1)(c_1a_2 - c_2\,a_1)}$$

$$z = \frac{(b_1a_2 - b_2a_1)\,(d_1a_2 - d_2a_1) - (b_1a_3 - b_3a_1)\,(d_1a_3 - d_3\,a_1)}{(b_1a_2 - b_2a_1)\,(c_1a_3 - c_3a_1) - (b_1a_3 - b_3a_1)(c_1a_2 - c_2a_1)}$$

Puestos estos resultados en la (1) por ejemplo, se tendrá el valor de x , expresado como solución de una ecuación de primer grado en una incognita, que sabemos resolver.

La discusión en cuanto a determinación, incompatibilidad o indeterminación de un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas equivale a considerar tres planos en el espacio según presenten o no un punto común. Esto exigiría avanzar en nuestros conocimientos de geometría analítica, para volver a tropezar ante un escollo semejante cuando tratemos de enfrentar la discusión de un sistema de mayor orden.

Para obviar esta sucesión creciente de dificultades, en la discusión de los sistemas de ecuaciones lineales, presentamos el siguiente estudio sobre determinantes, con los que se resuelve tanto el problema de la discusión, como el del cálculo de las soluciones.

DETERMINANTES

48.- MATRICES CUADRADAS

Consideremos un grupo de n^2 elementos dispuestos en cuadro según n lineas horizontales a las que denominaremos filas, y según n lineas verticales a las que denominaremos columnas. Designemos a los elementos de dicho cuadro según una misma letra, acompañada de dos subindices, el primero indicando el orden de la fila, contando de arriba hacia abajo, y el segundo indicando el orden de la columna, de izquierda a derecha. Así, con a_{32} designaremos el elemento que se encuentra en la intersección de la 3ra fila con la 2da. columna.

De acuerdo a esta denominación los elementos de un cuadro de cuatro filas y cuatro columnas, al que designamos bajo el nombre de matriz cuadrada de orden cuatro, se dispondrán de la siguiente manera:

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{matrix}$$

49.- **DETERMINANTES: DEFINICION.-**

Se llama determinante de una matriz al polinomio que tiene como términos todos los productos posibles de n elementos, tomados de entre los n^2 de la matriz, en forma tal que en cada producto haya un solo factor de cada fila y uno de cada columna, adjudicando a estos términos el signo (+) ó (-) según que las permutaciones de los subíndices correspondientes a las filas sean o no de la misma clases que las permutaciones de los subíndices correspondientes a las columnas.

Para decidir sobre si dos permutaciones de un mismo conjunto de números, son o no de una misma clase, atenderemos al número de inversiones que presenta, con respecto de la sucesión de los números naturales. Este número de inversiones que puede ser, en cualquiera de las dos permutaciones, tanto par como impar, determinará según sean o no de una misma clase, el signo del término del desarrollo que forman los elementos en cuestión.

La forma en que notaremos un determinante será la de presentar entre dos líneas verticales la matriz correspondiente al mismo.

El determinante de la matriz cuadrada de orden cuatro visto más arriba se escribirá, por tanto:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

Aplicando la definición, formemos un término cualquiera de su desarrollo, por ejemplo, el

$$- a_{12} \quad a_{31} \quad a_{43} \quad a_{24}$$

Este presenta un elemento de cada fila y uno de cada columna, luego es efectivamente un término del mismo. Para asignarle el signo (+) ó (-) según corresponda, analicemos las permutaciones de los primeros y de los segundos subíndices. Estas son respectivamente

$$1 \quad 3 \quad 4 \quad 2 \qquad y \qquad 2 \quad 1 \quad 3 \quad 4$$

En la primera observamos que el 1 precede a los otros tres números, por lo tanto no forma inversión; el 3, respecto del cuatro, forma sucesión, pero respecto del 2 origina una inversión; el cuatro forma con el 2 una inversión. Así la permutación de los subíndices correspondientes a las filas presenta dos inversiones.

Un estudio similar de las inversiones de la permutación correspondiente a las columnas nos mostraría que la misma presenta una inversión.

Resulta entonces que ambas permutaciones son de distinta clase- una par y la otra impar - por lo que, de acuerdo a la definición,deberemos asignarle a nuestro término el signo (-).

Para calcular más rápidamente el signo de un término cualquiera del desarrollo de un determinante conviene ordenar los elementos que figuran en el mismo en forma - que los primeros subíndices figuren en orden creciente, de 1 a n (esto siempre será posible ya que por definición todo término del desarrollo de un determinante tiene un elemento de cada fila y de cada columna), observar la paridad de la permutación que así resulte con los segundos subíndices y asignar el signo a dicho término según ésta. Aplicando este camino al ejemplo anterior, se tiene al disponer tales elementos según un orden creciente de los primeros subíndices, la siguiente disposición:

$$a_{12} \quad a_{24} \quad a_{31} \quad a_{43}$$

La permutación de los segundos subíndices: 2413 presenta 3 inversiones, correspondiendo, como era de esperar, el signo (-) al término en cuestión.

50.- DESARROLLO DE UN DETERMINANTE DE ORDEN 2 Y 3.

En general un determinante de orden 2 se escribirá:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

Aplicando la definición, los dos únicos términos de su desarrollo serán:

$$\Delta = a_{11} \quad a_{22} \quad - \quad a_{12} \quad a_{21}$$

Se ve que el desarrollo de este determinante está dado por el producto de los elementos que están sobre la diagonal principal, menos el producto de aquellos que están sobre la diagonal secundaria.

Un determinante de orden 3 puede escribirse en general;

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Aplicando la definición se tiene su desarrollo dado por:

$$\Delta = a_{11} \quad a_{22} \quad a_{33} + a_{12} \quad a_{23} \quad a_{31} + a_{21} \quad a_{32} \quad a_{13}$$

$$- a_{31} \quad a_{22} \quad a_{13} - a_{21} \quad a_{12} \quad a_{33} - a_{32} \quad a_{23} \quad a_{11}$$

Para obtener rápidamente los términos del desarrollo de un determinante de tercer orden se aplica la siguiente regla práctica debida a SARRUS. El desarrollo de un determinante de tercer orden consta de seis términos, tres positivos y tres negativos. Los tres términos positivos resultan de formar el producto de los elementos de la <u>diagonal principal</u> y de cada paralela a ella multiplicada por el elemento del vértice opuesto; mientras que los términos negativos resultan de formar el producto de los elementos de la <u>diagonal secundaria</u> y de cada paralela a la misma multiplicada por el elemento del vértice opuesto.

51.- PROPIEDADES DE UN DETERMINANTE DE ORDEN N

Como el desarrollo de un determinante de orden n tiene $n!$ términos, de los cuales la mitad presenta el signo positivo y la mitad el signo negativo, se comprenderá que el camino propuesto por la definición no resulta muy conveniente para obtener el desarrollo de un determinante de orden elevado. Por eso pasamos a estudiar las propiedades de los mismos para poder desarrollar un determinante mediante pasos algebraicos más simples que los provistos por la definición.

Para enumerar las propiedades de un determinante adoptaremos a más de la nomemclatura expuesta al principio de estas lineas, y para designar a dos elementos a_{ij} ; a_{ji} , simétricos respecto de la diagonal principal el nombre de conjugados. Así se dirá en un determinante que el elemento a_{42} es conjugado del a_{24} .

i) Si se sustituye cada elemento de un determinante por su conjugado, el valor del mismo no varía. En efecto, ésto equivale a permutar las filas y las columnas sin alterar el orden de los elementos dentro de cada una de éstas. Cada término del determinante está formado por n elementos, uno de cada fila y uno de cada columna, luego pertenece igualmente al segundo; además las permutaciones de los subíndices indicarán ahora columna, lo que fueran filas y reciprocamente. Por tanto el signo de cada término, que depende de la igualdad o diferencia de clase entre estas dos permutaciones, permanecerá invariante.

ii) Si se permutan entre si dos lineas paralelas (filas o columnas), sin alterar el orden de los elementos de cada una, el determinante conserva su valor absoluto, pero cambia de signo. En efecto: un término cualquiera del primer determinante, por tener un elemento de cada fila y de cada columna, figurará también en el segundo. Para determinar el signo que le corresponde en el segundo efectuamos el siguiente razonamiento.

De los elemento de un dado término del desarrollo, ordenados según el subíndice que permanece, se observa: a) si los dos elementos que se permutan con consecutivos, y los subíndices correspondientes estaban en sucesión, formarán una inversión, cambiando por lo tanto el signo de cada término; b) si los dos elementos que se permutan no son consecutivos, habrá entre ellos k elementos. Para altenar la posición relativa de los mismos se deberá trasladar el primero a través de k lugares y el segundo a través de $k+1$ lugares, lo que origina $k+k-1 = 2k-1$ inversiones nuevas, cambiando por lo tanto el signo de cada término.

iii) Si un determinante tiene dos lineas paralelas iguales, es nulo. En efecto al permutar las dos lineas iguales se tendrá, por la propiedad anterior, que el nuevo determinante, de igual valor absoluto que el anterior, presenta el signo cambiado. Como los elementos permutados son de igual valor, ambos determinantes deberán tener igual valor numérico, o sea deberá ser: $\Delta = -\Delta$ de donde resulta: $\Delta = 0$ c.q.d.

iv) Si en un determinante se multiplican todos los elementos de una línea por un número λ, el determinante queda multiplicado por éste número.

En efecto, como en cada término del desarrollo del determinante figura un elemento de la línea en cuestión, λ figurará como factor común de todos los términos del desarrollo, lo que equivale a multiplicar por λ el valor del determinante.

v) Un determinante es nulo si los elementos de las líneas paralelas son proporcionales entre sí. En efecto: sacando fuera el factor de proporcionalidad, resultará un determinante con dos líneas paralelas iguales, que es nulo por lo expuesto en la iii.

52.- DESARROLLO DE UN DETERMINANTE DE ORDEN N

i) Si en una matriz de orden n se suprime la fila g y la columna h, se tiene una de orden $n-1$ cuyo determinante se llamará menor complementario del elemento a_{gh}, designándolo según α_{gh}.

En la matriz:

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{matrix}$$

el menor complementario del elemento a_{32} será:

$$\alpha_{32} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

ii) Si en el desarrollo de un determinante de orden n sacamos el elemento a_{gh}, factor común de todos los términos en que figura, aparecerá multiplicado por un polinomio que llamaremos <u>adjunto</u> del elemento a_{gh} y designamos según A_{gh}

<u>Determinación del valor del adjunto</u>:

a) Si suponemos que el elemento a_{gh} ocupa la posición a_{11} en la matriz de orden n, los términos del desarrollo del determinante en que el mismo figure, serán de la forma

$$(-1)^{v} \; a_{11} \; a_{2i_2} \; a_{3i_3} \; \ldots \; a_{ni_n}$$

en donde $i_2 \neq i_3 \neq \ldots \neq i_n = \overline{2,n}$, que se lee i_2 distinto de i_3, distinto de i_4 , etc., distinto de i_n , varían de de 2 a n ; y en donde v designa el número de inversiones en cada permutación 1, i_2 , i_3,... , i_n . Como v resulta igualmente el número de inversiones la permutación i_2 , i_3, ... , i_n , y los (n-1) términos de

$$(- 1)^v \; a_{2i_2} \cdot a_{3i_3} \; \ldots \; a_{ni_n}$$

son los del desarrollo de un determinante, menor complementario de a_{11}, se tiene que el adjunto del elemento a_{11} coincide en valor y signo con su menor complementario.

b) Consideremos ahora para el elemento genérico una posición cualquiera: a_{gh} . Para hallar el valor del adjunto de este elemento nos referiremos al caso anterior. Podemos llevar a_{gh} , a la primera fila permutando la fila g con las (g-1) anteriores: y además lo llevaremos a la primera columna permutando la columna h con las (h - 1) anteriores. Estas (g - 1) + (h -1) = g + h - 2 permutaciones necesarias para llevar el elemento a_{gh} a la posición del a_{11}, dan lugar a igual número de cambios de signo, de donde, por lo visto para el caso anterior, el adjunto del elemento a_{gh} será igual al correspondiente menor complementario tomado con igual o distinto signo según que g + h sea respectivamente par o impar.

iii) Las propiedades que se acaban de enunciar permiten expresar el valor de un determinante de orden n co mo suma de n determinantes de orden $n-1$

El valor de un determinante es igual a la suma de los elementos de una linea multiplicados por sus correspondientes adjuntos.

Así se tiene al desarrollar por los elementos de la fila: i :

$$\Delta = a_{11} \quad A_{11} + a_{12} \quad A_{12} + \dots + a_{1n} \quad A_{1n}$$

$$\Delta = a_{11} \quad (-1)^{1+1} \quad \alpha_{11} + a_{12} \quad (-1)^{1+2} \quad \alpha_{12} + \dots$$

$$\dots + a_{1n} \quad (-1)^{1+n} \quad \alpha_{1n}$$

regla que se simplifica, ya que los sucesivos factores $(-1)^{i+j}$ presentan alternadamente el signo (+) ó (-).

Ejemplo:

Consideremos el problema de desarrollar el siguiente determinante por los elementos de la tercera columna

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1/3 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 7 & 0 & 3 \\ \frac{1}{2} & 2 & 5 & -1 \end{vmatrix}$$

Se tiene:

$$\Delta = 2\,A_{13} + 2\,A_{23} + 0A_{33} + 5\,A_{43}$$

$$\Delta = 2\alpha_{13} - 2\alpha_{23} + 0\alpha_{33} - 5\,\alpha_{43}$$

siendo los respectivos menores complementarios

$$\alpha_{13} = \begin{vmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 1 & 7 & 3 \\ \frac{1}{2} & 2 & 1 \end{vmatrix} = (-7+2+9/2) - (7/2 - 6+3) = -1$$

$$\alpha_{23} = \begin{vmatrix} 2 & 1/3 & -1 \\ 1 & 7 & 3 \\ \frac{1}{2} & 2 & 1 \end{vmatrix} = (14-2+\tfrac{1}{2}) - (-7/2+1/3+12)$$

$$=11/3$$

$$\alpha_{43} = \begin{vmatrix} 2 & 1/3 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ \frac{1}{2} & 2 & 1 \end{vmatrix} = (6+2+1/6)-(-3/6 -1/3+4) = 5$$

<u>OBSERVACION</u>: Omitimos el cálculo de α_{33} ya que en el desarrollo propuesto aparece multiplicado por cero).

El valor de Δ será entonces:

$$\Delta = 2\,(-1) -2\,\left(\frac{11}{3}\right) - 5\,(5)$$

$$= -2 - \frac{22}{3} - 25 = -\frac{103}{3}$$

53.- PROPIEDADES DE UN DETERMINANTE RELATIVAS A SU DESARROLLO POR ELEMENTOS DE UNA LINEA:

i) La suma de los elementos de una linea, multiplicados por los correspondientes adjuntos de una paralela, es igual a cero.

En efecto: esto equivale a desarrollar un determinante que tiene dos lineas paralelas iguales, que, por propiedades anteriores, es cero.

ii) Si en un determinante de orden n los elementos de una línea son polimonios de m términos, el determinante puede descomponerse en suma de m determinantes de orden n, que presentan como elementos de dicha línea cada término del correspondiente polinomio.

Considéremos el siguiente determinante:

$$\Delta = \begin{vmatrix} (x_1 + y_y + z_1) & (x_2 + y_2 + z_2) & \cdot\cdot & (x_n + y_n + z_n) \\ a_{21} & a_{22} & \cdot\cdot & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdot\cdot & a_{3n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdot\cdot & a_{nn} \end{vmatrix}$$

al desarrollarlo por elementos de la primera fila se tendrá

$$\Delta = (x_1 + y_1 + z_1)\, A_{11} + (x_2 + y_2 + z_2)\, A_{12} + \cdot\cdot + (x_n + y_n + z_n)\, A_{1n}$$

$$\Delta = x_1 \; A_{11} + x_2 \; A_{12} + \cdot\cdot\cdot + x_n \; A_{1n} +$$

$$+ y_1 \quad A_{11} + y_2 \quad A_{12} + \quad . \; . \; . + y_n \quad A_{1n} +$$

$$+ z_1 \quad A_{11} + z_2 \quad A_{12} + \quad . \; . \; . + z_n \quad A_{1n}$$

como cada una de estas lineas nos da el desarrollo de un determinante por los elementos de la primera fila, siendo éstos cada uno de los correspondientes términos del polinomio original, se tiene demostrada la propiedad anterior.

iii) Un determinante no varía si se suma a los elementos de una linea los correspondientes elementos de una paralela multiplicados por una constante.

En efecto, aplicando la propiedad anterior, este determinante podrá descomponerse en suma de dos determinantes del mismo orden, uno de los cuales es el determinante original, siendo el otro igual a cero, por tener dos lineas paralelas proporcionales.

Esta propiedad resulta muy útil para facilitar el desarrollo de un determinante por elementos de una linea, ya que permite, mediante convenientes combinaciones lineales, hacer cero varios elementos de una misma línea, evitando por tanto la necesidad de calcular los correspondientes adjuntos.

<u>Ejemplo</u>:

Consideremos el siguiente determinante.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 4 & -2 \\ 5 & 1 & 5 & 2 \\ 5 & 1 & 0 & 5 \end{vmatrix}$$

al que transformaremos para desarrollarlo por los elementos de la tercer columna. Si a la tercera columna sumamos la primera multiplicada por (-1) se tendrá:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 5 & (2-2) & 3 \\ -1 & 3 & (4+1) & -2 \\ 5 & 1 & (5-5) & 2 \\ 5 & 1 & (0-5) & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 0 & 3 \\ -1 & 3 & 5 & -2 \\ 5 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -5 & 5 \end{vmatrix}$$

al que volvemos a modificar sumando a los elementos de la segunda fila, los correspondientes de la cuarta, así se tiene:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 0 & 3 \\ (-1+3) & (3+1) & (5-5) & (-2+5) \\ 5 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -5 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 0 & 3 \\ 5 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -5 & 5 \end{vmatrix}$$

al que volvemos a modificar sumando a los elementos de la segunda fila, los correspondientes de la cuarta; así se tiene:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 0 & 3 \\ (-1+3) & (3+1) & (5-5) & (-2+5) \\ 5 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -5 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 0 & 3 \\ 5 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -5 & 5 \end{vmatrix}$$

el que desarrollado por elementos de la tercera fila, resulta:

$$\Delta = -5 \quad A_{34} = -5\,(-1)^3 \;\alpha_{34}$$

$$= 5 \begin{vmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 2 & 4 & 3 \\ 5 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 5 \cdot (16+6+75-60-20-6) = 55$$

De esta forma se ha reducido el cálculo del determinante de orden cuatro al cálculo de un solo determinante de orden tres.

A veces, el pretender hacer cero a todos menos uno, de los elementos de una línea, puede ocasionar más trabajo que el ahorro producido al disminuir el número de determinantes a valorizar, en tales casos una justa apreciación decidirá el camino a seguir para llegar a un cómodo término medio.

iiii) Si en un determinante se tiene una linea que es suma de paralelas multiplicadas por λ_1, λ_2, etc., el valor del mismo será cero.

En efecto, por la propiedad ii, este determinante puede descomponerse en suma de varios, cada uno de los cuales es nulo por tener dos líneas paralelas proporcionales.

54.- APLICACION DE LA TEORIA DE LOS DETERMINANTES A LA RESOLUCION DE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES.

i) Regla de Cramer:

Un sistema de n ecuaciones lineales con n incógnitas tiene solución única cuando el determinante de la matriz de los coeficientes es distinto de cero. El valor de cada incógnita se obtiene dividiendo por el determinante del sistema, cada uno de los determinantes formados al sustituir por los términos independientes, la columna en donde figuran los coeficientes de dicha incógnita.

Consideremos el sistema general de n ecuaciones con n incógnitas, cada una de las cuales figura linealmente.

$$\begin{cases} a_{11}\ x_1 + a_{12}\ x_2 + \dots + a_{1n}\ x_n = k_1 \\ a_{21}\ x_1 + a_{22}\ x_2 + \dots + a_{2n}\ x_n = k_2 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \qquad\quad \vdots \\ a_{n1}\ x_1 + a_{n2}\ x_2 + \dots + a_{nn}\ x_n = k_n \end{cases}$$

Si se multiplica la primera ecuación por A_{11} ; la 2da. por A_{21} , etc., la n-ésima por A_{n1}, al sumar m.a.m. las anteriores se tendrá:

$$(a_{11}\ A_{11} + a_{21}\ A_{21} + \dots + a_{n1}\ A_{n1})x_1 + (a_{12}A_{11} + a_{22}A_{21} + \dots +$$

$$+ a_{n2}\ A_{n1}\ )\ x_2 + \dots + (\ a_{1n}\ A_{11} + a_{2n}\ A_{21} + \dots + a_{nn}\ A_{n1})x_n =$$

$$= k_1\ \ A_{11} + k_1\ \ A_{21} + \dots + k_n\ A_{n1}$$

En ésta, el primer parentesis nos da el desarrollo de un determinante de orden n, que no es sino el determinante de la matriz de los coeficientes del sistema, determinante que llamaremos Δ . Los demás paréntesis del primer miembro son todos cero por propiedad de determinantes. El segundo miembro nos da el desarrollo de un determinante por los elementos de la primera columna, en donde los mismos, que para Δ eran los coeficientes de x_1 ,son ahora los términos independientes del sistema. Denotando este último segun Δ_1 se tiene:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} k_1 & a_{12} \dots & a_{1n} \\ k_2 & a_{22} \dots & a_{2n} \\ k_n & a_{n2} \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots & a_{2n} \\ a_{n1} & a_{n2} \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}$$

estando las demás variables resueltas en forma semejante.

ii) Discusión del sistema.

a) Si el determinante del sistema es igual a cero, y alguno de los determinantes Δ_i resulta distinto de cero, aparecerá la ecuación imposible.

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta} = \frac{\Delta_i}{0}$$

que nos muestra que el sistema dado es incompatible.

b) si además de ser cero el determinante del sistema resultan cero cada uno de los determinantes Δ_i, el sistema será indeterminado, ya que nada puede inferirse de la ecuación:

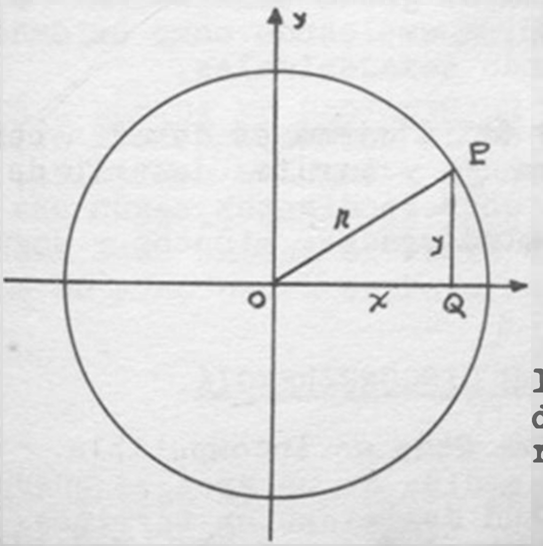
$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta} = \frac{0}{0}$$

c) El tercer caso, de determinación, corresponderá al caso en que tanto el determinante del sistema como los particulares de cada incógnita son distintos de cero.

ELEMENTOS DE TRIGONOMETRIA

55.- CIRCUNFERENCIA TRIGONOMETRICA.

Consideremos una circunferencia de radio unitario con centro en el origen de coordenadas, a la que designaremos con el nombre de circunferencia trigonométrica. La ecuación en esta curva, o sea la restricción que soportan las coordenadas de los puntos del plano que están sobre la misma, se obtiene facilmente partiendo de la definición de la circunferencia como "lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de un punto fijo llamado centro." Ubicando el centro en el origen de coordenadas se observará, para un punto cualquiera P(x,y) sobre la circunferencia, la siguiente relación



$$\overline{OP}^2 = \overline{OQ}^2 + \overline{PQ}^2$$

la que en términos de las coordenadas de los puntos O,P,Q, resulta:

$r^2 = x^2 + y^2$, y en especial para la circunferencia trigonométrica de radio unitario

$$1 = x^2 + y^2$$

56.- ARCOS Y ANGULOS EN LA CIRCUNFERENCIA TRIGONOMETRICA.

Si partiendo de la intersección de la circunferencia centrada,con el sentido positivo del eje de las x , designado con M en la figura anterior, nos desplazamos sobre la circunferencia, observamos que podemos hacer ésto en dos sentidos opuestos,a los que asignaremos las denominaciones de positivo o negativo según coincidan o no con el sentido contrahorario de giro. Así, si desde el punto M nos remontamos por la circunferencia hasta encontrar el punto P, habremos descripto siguiendo el sentido positivo, el arco MP. Se observará que a todo arco que se considere sobre la circunferencia trigonométrica corresponde un ángulo central. En este caso, al arco MP corresponde el ángulo central MOP. Llamaremos amplitud de un arco de circunferencia a la medida que se obtiene considerando como unidad la 360 parte de la circunferencia completa, empleando como unidades auxiliares el minuto y el segundo sexagesimales.

Llamaremos amplitud de un ángulo a la medida que se obtiene considerando como unidad el grado sexagesimal ó 90ª parte de un ángulo recto, empleando como unidades auxiliares el minuto y el segundo sexagesimales.

Como se ve, y en virtud de la correspondencia existente entre arcos de circunferencia y ángulos centrales, designaremos a ambos elementos correspodientes según una misma amplitud que expresaremos en grados, minutos y segundos sexagesimales.

57.- RECTIFICACION DE UN ARCO DE CIRCUNFERENCIA.

A los fines de fijar la medida de un arco, se puede igualmente considerar la longitud del mismo en términos de la unidad de medida de segmentos de recta, longitud que esta dada por la siguiente expresión:

$$l = \frac{2 \cdot \pi \cdot r \cdot \theta}{360^{\circ}}$$

en donde l designa la longitud buscada; π es la conocida constante, relación entre la circunferencia y su diámetro; r es el radio de la circunferencia en cuestión; y θ la medida sexagesimal del arco, expresada en grados y fracción decimal.

La fórmula anterior permite conocer la longitud del desarrollo de un arco de circunferencia en función del radio de la misma y de la amplitud del arco. Explicitando en la misma θ, se tendrá la amplitud de un arco de circunferencia en función del radio de la misma y de la longitud del arco. Así se tiene:

$$\theta = \frac{l \cdot 360^\circ}{2 \cdot \pi \cdot r}$$

58.- MEDIDA EN RADIANES DE UN ARCO DE CIRCUNFERENCIA.

Si al medir la longitud del arco rectificado se toma como unidad el radio de la circunferencia, la medida de un arco podrá expresarse a través de la relación:

$$\lambda = \frac{l}{r}$$

que recibe el nombre de medida en radianes o medida circular del arco y en donde l indica la longitud del arco rectificado y r el radio de la circunferencia.

En virtud de las expresiones anteriores, la medida en radianes de un cierto arco, en función de la amplitud del mismo estará dada por la siguiente

$$\lambda = \frac{2\pi \cdot r \cdot \theta}{r \cdot 360} = \frac{2 \cdot \pi \cdot \theta}{360}$$

de donde resulta que la medida en radianes de un arco es una invariante del arco,que no depende del radio de la circunferencia que se considere. Comparando esta última expresión con la que nos da la longitud del desarrollo de un arco en función de la amplitud, se verá que ambas medidas coinciden cuando se consideran arcos sobre una circunferencia de radio unitario (circunferencia trigonométrica).

De la fórmula anterior se tiene que la amplitud de un arco en función de su medida en radianes está dada por:

$$\theta = \frac{\lambda \quad 360}{2\ \pi}$$

Estas fórmulas permiten el pasaje de medidas de un sistema a otro, siendo los valores más notables los del siguiente cuadro:

Amplitud del arco	Medida en radianes.
0 grado	0
$57\frac{2957}{10000}$	1
90 grado	$\pi/2$
180 "	π
270 "	$3/2 \cdot \pi$
360 "	$2 \cdot \pi$

59.- PASAJE DE UN SISTEMA A OTRO. Si para una medida en radianes queremos obtener la correspondiente medida sexagesimal, las fórmulas anteriores nos proporcionarán un resultado expresado en grados y fracciones decimales de grado. Para expresar estas fracciones de grado en adecuadas unidades auxiliares como son el minuto y el segundo sexagesimal se procederá de acuerdo al siguiente ejemplo.

Sea la medida en radianes de un arco 0.782. La correspondiente medida sexagesimal será:

$$\theta = \frac{0.782 \cdot 360^\circ}{2\pi} = 44.8052$$; en grados y fracción decimal. Los 8052 diezmilésimos de grado tienen su equivalente en minutos y segundos según el siguiente esquema:

$$\frac{10000}{60} = \frac{8052}{x} \quad \text{de donde} \quad x = \frac{60 \cdot 8052}{10000} = 48.312$$

expresa en minutos y fracción decimal el anterior valor. Los 312 milésimos de minuto de arco se convertirán en segundos según el siguiente esquema:

$$\frac{1000}{60} = \frac{312}{x} \quad \text{siendo } x = \frac{60 \cdot 312}{1000} = 18.72$$

resultado este último que queda expresado en segundos de arco y centésimas de segundo. De esta forma se obtiene la correspondencia.

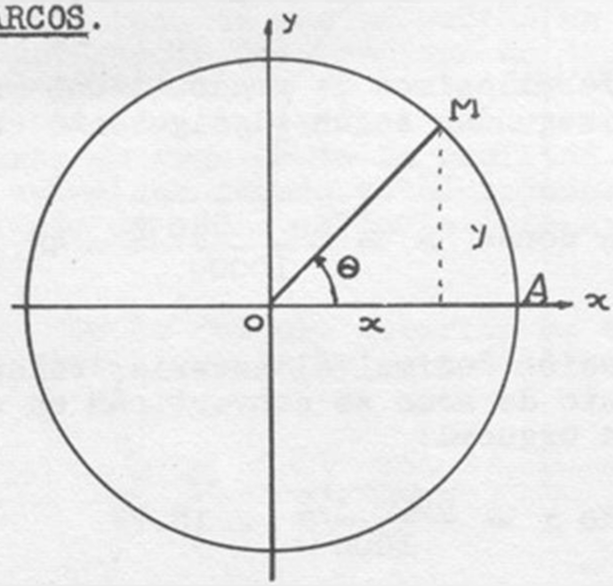
$$\lambda = 0.782 \text{ ——— } \theta = 44^\circ\ 48'\ 18''\ 72/100$$

Si se hubiera de resolver el problema inverso, es decir expresar en radianes una cantidad dada en grados minutos y segundos, se podrá optar por uno de los dos caminos siguientes: a) expresar los minutos y segundos en cuestión, como fracciones decimales de grado y emplear entonces nuestra conocida fórmula o, b) expresar el total de grados minutos y segundos en segundos de arco y resolver la siguiente expresión:

$$\lambda = \frac{2 \cdot \pi \cdot \theta}{360 \cdot 60 \cdot 60}$$ en donde θ esta expresado

en segundo de arco.

60.- RELACIONES ENTRE LOS PUNTOS EXTREMOS DE DISTINTOS ARCOS.

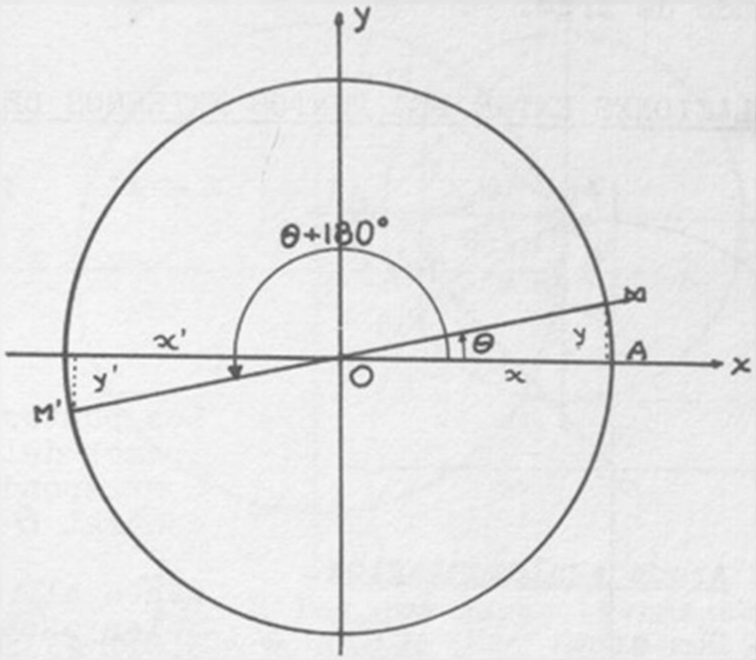


Los puntos A y M. extremos del arco $\widehat{AM}$, que corresponde al ángulo central θ, sustentan tanto al $\widehat{AM}$ como a cualquier otro arco que difiera de éste en uno o más giros completos de circunferencia. Así, considerando un origen común A, el punto M corresponde tanto al arco $\widehat{AM}$ de medida θ como a cualquier otro arco que teniendo los mismos extremos, difiera del AM en un número entero de giros, y cuya medida será $\theta + 2k\pi$; en donde k es un entero (positivo, negativo o nulo).

Arcos que difieren en 180°.

. Si a un arco $\widehat{AM}$ que corresponde a un ángulo central θ le agregamos o sustraemos una semicircunferencia obtendremos un arco $\widehat{AM'}$ que corresponde a un ángulo central

$\theta + 180$, (ó $\theta - 180$) y cuyo extremo M' es el punto diametralmente opuesto a M. Así, los arcos con igual origen A, pero que difieren en 180° tendrán sus extremos, simétricos respecto al centro de la circunferencia trigonométrica.



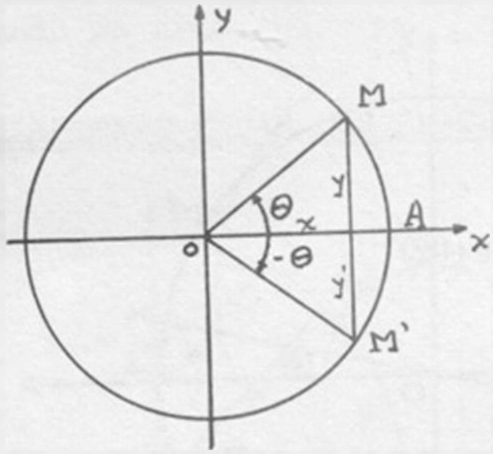
Esto permite establecer entre las coordenadas de los extremos M y M' , que denotamos según (x, y) y (x',y'), las siguientes relaciones

$$x = -x' \quad ; \quad y = -y' .-$$

<u>Arcos simétricos ó contrarios</u>.

Consideremos el arco $\widehat{AM}$ que corresponde a un ángulo central θ . Si la trayectoría del punto movil que se desplaza sobre la circunferencia, generando un arco, hubiera correspondido al sentido negativo de giro, se tendría correspondiendo a un ángulo central de amplitud $-\theta$,

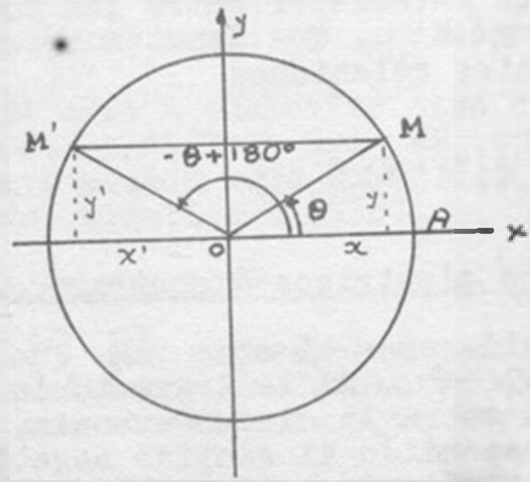
un arco cuyo extremo M' resulta simétrico al M, respecto al sentido positivo del eje de las x . Los dos ángulos centrales de amplitud θ y $-\theta$, respectivamente correspondientes a los arcos $\widehat{AM}$ y $\widehat{AM'}$, se dirán simétricos o contrarios; y las relaciones entre las coordenadas de los puntos extremos de los arcos, M y M' que denotaremos respectivamente según (x,y) y (x',y'), serán



$$x = x' \quad ; \quad y = -y'$$

<u>Arcos suplementarios</u>.

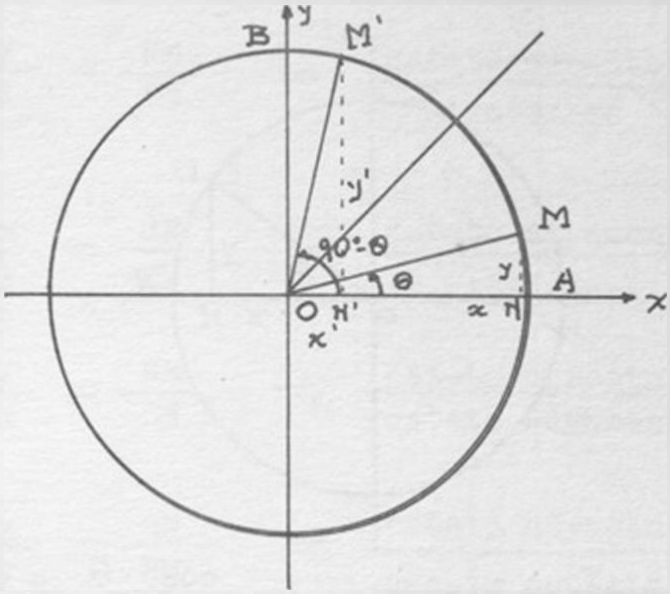
Dos arcos $\widehat{AM}$ y $\widehat{AM'}$ a los que corresponden ángulos centrales θ y $180 - \theta$ respectivamente, se dirán suplementarios, ya que su suma es igual a 180° .



Facilmente se observa que los extremos de los arcos, M y M' , son simétricos respecto al eje de las y, por lo que valdrá para arcos suplementarios la siguiente relación entre las coordenadas de sus puntos extremos:

$$x = -x' \quad ; \quad y = y'$$

<u>Arcos complementarios</u>.-



Dos arcos $\overset{\frown}{AM}$ y $\overset{\frown}{AM'}$ a los que respectivamente corresponden arcos centrales de medida θ y $90^{o}-\theta$ se dicen complementarios cuando su suma es 90^{o}. Facilmente se ve que por ser AM y AM complementarios, será $\overset{\frown}{AM} = M'B$, por lo que M y M' resultan simétricos respecto de la bisectriz del primer y tercer cuadrante.

Consideremos los triángulos ONM y OM'N', determinados respectivamente por el origen, el extremo de un arco, y su proyección sobre el eje de las x. Estos son rectángulos en N y N' respectivamente, siendo además semejantes. Por propiedad de triángulos semejantes

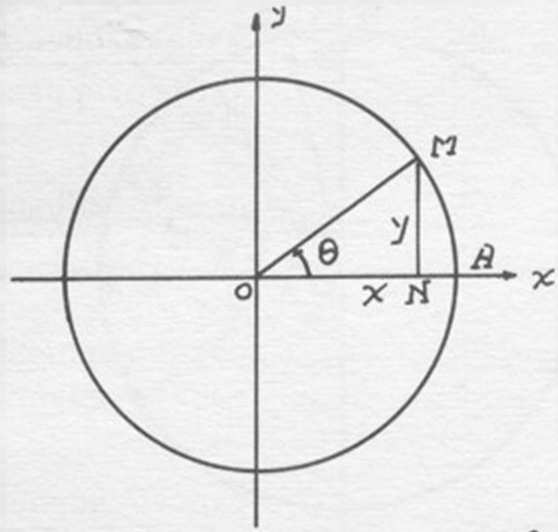
$$\frac{ON}{OM} = \frac{N'M'}{OM'} \quad \text{y} \quad \frac{NM}{OM} = \frac{ON'}{OM'}$$

de las que respectivamente resultan:

$$x = y' \qquad \text{y:} \qquad y = x'$$

61.- <u>FUNCIONES TRIGONOMETRICAS</u>

Definiremos en la circunferencia trigonométrica, como funciones de los arcos, a las siguientes relaciones:



$\text{sen } \theta = y$ $\qquad$ $\cos \theta = x$

$\text{tg } \theta = \dfrac{y}{x}$ $\qquad$ $\text{cotg } \theta = \dfrac{x}{y}$

$\sec \theta = \dfrac{1}{x}$ $\qquad$ $\text{cosec } \theta = \dfrac{1}{y}$

Estas funciones trigonométricas, llamadas también funciones circulares, expresan en la circunferencia trigonométrica relaciones entre un arco $\widehat{AM}$ y las coordenadas de su extremo (x,y). Observando los segundos miembros de las anteriores, resultan las siguientes relaciones.

$$\text{tag } \theta = \frac{\text{sen } \theta}{\cos \theta} \quad ; \quad \text{cotg } \theta = \frac{\cos \theta}{\text{sen } \theta}$$

$$\sec \theta = \frac{1}{\cos \theta} \quad ; \quad \text{cosec } \theta = \frac{1}{\text{sen } \theta}$$

Consideradas las funciones trigonométricas respecto de los elementos del triángulo rectángulo ONM, con vértices en O, origen de la circunferencia trigonométrica, M, extremo del arco $\widehat{AM}$; y N, proyección de M sobre el eje de las x ; definen para el ángulo θ , que corresponde al arco $\widehat{AM}$, las siguientes relaciones.

$$\text{sen}\,\theta = \frac{y}{1} = \frac{NM}{OM} = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\cos\theta = \frac{x}{1} = \frac{ON}{OM} = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\text{tag}\,\theta = \frac{y}{x} = \frac{NM}{ON} = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}}$$

$$\text{cotg}\,\theta = \frac{x}{y} = \frac{ON}{NM} = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{cateto opuesto}}$$

$$\sec\theta = \frac{1}{x} = \frac{OM}{ON} = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adyacente}}$$

$$\text{cosec}\,\theta = \frac{1}{y} = \frac{OM}{MN} = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto opuesto}}$$

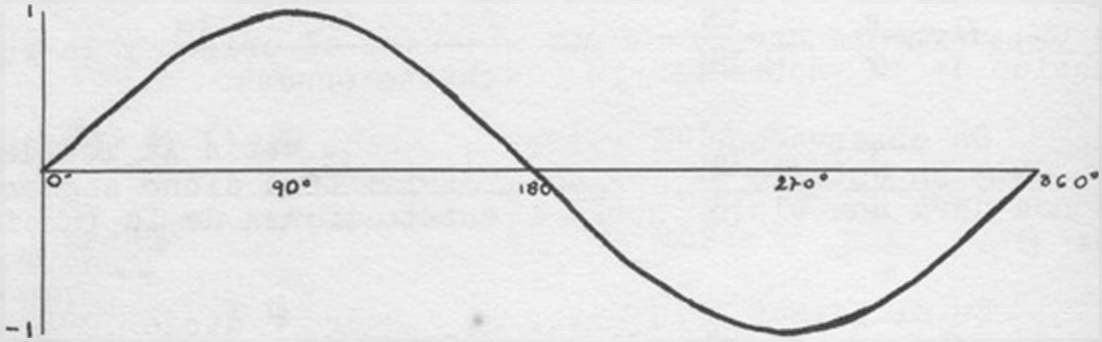
que relacionan, en un triángulo rectángulo, la medida de un ángulo con dos de los lados.

62.- ESTUDIO DEL SENO DE UN ANGULO (sen θ).

En la circunferencia trigonométrica el seno del arco $\overset{\frown}{AM}$ está representado en valor y signo por la medida del segmento MN, perpendicular al eje de las x, bajada desde M hasta encontrar dicho eje. Como la medida de MN varía al variar θ, observando los valores de éste se tendrá una idea de los valores de la función sen θ. Para $\theta = 0$, la medida de MN es cero. A medida que θ crece, y ésto en el primer cuadrante, la medida de MN crece, por lo que el seno de θ será una función creciente para valores de θ entre cero y 90^o ; argumento este último para el cual alcanza su mayor valor: 1.- Al crecer en el segundo cuadrante, sen θ decrece desde el valor 1 hasta el valor cero, que alcanza a los 180^o . En el tercer cuadrante, con θ creciendo desde 180^o a 270^o sen θ

decrece desde O hasta alcanzar el valor -1 para 270°. Finalmente en el cuarto cuadrante la función sen θ crece con el argumento, alcanzando el valor cero para 360°.

Si representamos en dos ejes coordenados estas variaciones de la función sen θ se tendrá la siguiente gráfica de la función seno; o sinusoide, la que es una curva ilimitada en ambos sentidos, comprendida dentro de los valores 1, -1, y que toma los mismos valores en períodos de 2π.



Como una consecuencia de las relaciones entre las coordenadas de los puntos extremos de arcos simétricos, que difieren en 180°, suplementarios y complementarios se tiene:

$$\text{sen}\ (-\theta) = -\text{sen}\ \theta$$

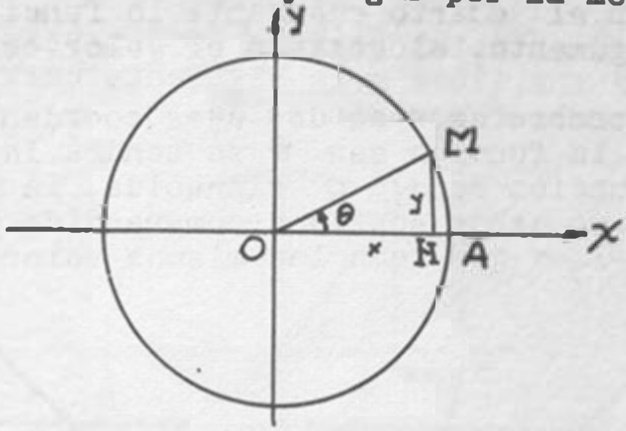
$$\text{sen}\ (180+\theta) = -\text{sen}\ \theta$$

$$\text{sen}\ (180-\theta) = \text{sen}\ \theta$$

$$\text{sen}\ (90-\theta) = \cos\theta$$

63.- <u>ESTUDIO DEL COSENO DE UN ANGULO (cos θ).</u>

En la circunferencia trigonométrica el coseno de un arco $\widehat{AM}$, al que corresponde un ángulo central θ , está representado en valor y signo por la medida



de OM, segmento que tiene por extremos el origen y la proyección de M sobre el eje de las x.

Se observa que al variar el arco, varía la medida de ON. Un estudio de los valores que toma dicho segmento nos dará una visión sobre las variaciones de la función cos θ .

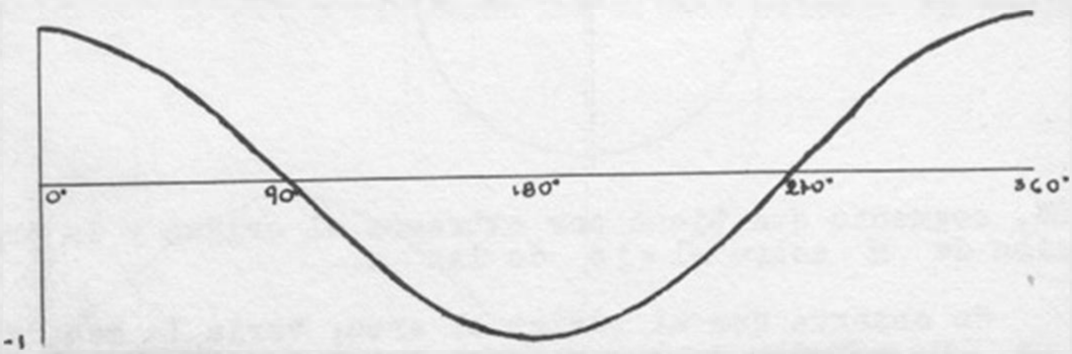
En el primer cuadrante, al crecer θ desde 0 $\pi/2$, ON decrece desde un valor unitario hasta alcanzar el valor cero.

En el segundo cuadrante al crecer θ desde $\pi/2$ a π , ON decrece desde 0 hasta -1, valor que alcanza cuando el ángulo se hace igual a π . En el tercer cuadrante, cuando θ crece desde π hasta $\frac{3}{2}\pi$, ON crece desde el valor -1 hasta 0.

Y finalmente en el cuarto cuadrante, crece desde cero hasta 1.

La observación de estas variaciones de la función coseno de θ permite reconocer que la misma es una función continua de θ , que está comprendida entre los valores ex tremos 1 y -1 , y que se repite en períodos de 2π .

La representación gráfica de los valores de la función coseno θ nos lleva a la siguiente curva que se conoce bajo el nombre de cosinusoide.



Como una consecuencia de las relaciones entre las coordenadas de los puntos extremos de arcos simétricos, que difieren en 180° , suplementarios y complementarios se tiene:

$$\cos(-\theta) = \cos\theta$$

$$\cos(180 + \theta) = -\cos\theta$$

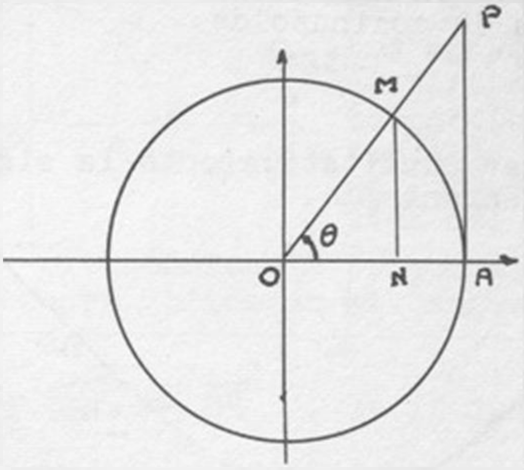
$$\cos(180 - \theta) = -\cos\theta$$

$$\cos(90 - \theta) = \operatorname{sen}\theta$$

64.- ESTUDIO DE LA TANGENTE DE UN ANGULO (tag θ).

En la circunferencia trigonométrica la tangente de un arco central θ , está representada para valores de θ comprendidos entre 0 y $\pi/2$, por la medida del segmento

PA que tiene por extremos el origen de los arcos y la in tersección con una paralela al eje de las y que pasa por A, con la prolongación del radio OM. Esto se demuestra facilmente partiendo de la definición de tangente.



En la figura anterior $\text{tag}\,\theta = \frac{MN}{ON}$. Observemos los triángulos OMN y OPA ambos rectángulos por construcción y con ángulo agudo θ común. Por propiedad de triángulos semejantes resulta en ellos:

$$\frac{MN}{ON} = \frac{PA}{OA}$$

Como el primer miembro interpreta la relación $\text{tag}\,\theta$, lo hará el segundo. Además observamos que $OA = 1$, por ser radio de la circunferencia trigonométrica; de donde resulte:

$$\text{tag}\,\theta = PA$$

Observamos que al variar el arco, varía la medida de PA, por lo que el valor de la tangente varía, creciendo en el primer cuadrante al crecer el arco. Analizando para los restantes cuadrantes las relaciones $\frac{\text{sen}\,\theta}{\cos\theta} = \text{tag}\,\theta$ y teniendo en cuenta las relaciones existentes entre las coordenadas de los extremos de arcos simétricos, que difieren en 180° y suplementarios

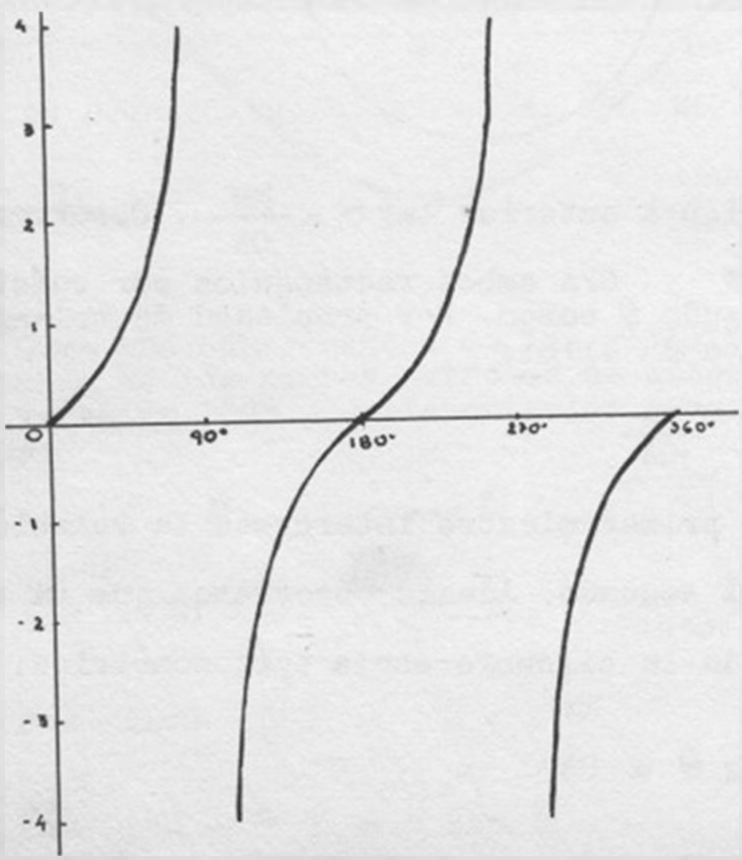
$$\text{tag}\ (-\theta) = -\text{tag}\,\theta$$

$$\text{tg}\ (180+\theta) = \text{tag}\,\theta$$

$$\text{tag}\ (180-\theta) = -\text{tag}\,\theta$$

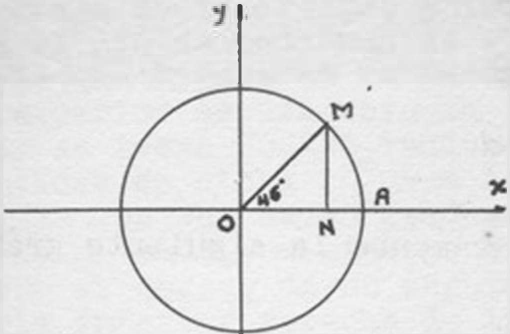
$$\text{tag}\ (90-\theta) = \text{cotg}\,\theta$$

se podrá representar cualitativamente la siguiente gráfica de la tangente o tangentoide.



65.- VALORES PARTICULARES DE LA FUNCION sen θ.

1.- Cálculo del seno de 45^{o}.-



Consideremos el ONM, rectángulo en N , que tiene ambos ángulos agudos de 45°. En virtud de la propiedad "a ángulos iguales se oponen lados iguales" se tiene: ON = NM . Como la medida del seno de θ está expresada en la circunferencia trigonométrica por el segmento NM , se tendrá aplicando el teorema de Pitágoras:

$$\overline{MN}^2 + \overline{ON}^2 = \overline{OM}^2$$

, de la que resulta por lo visto anteriormente:

$$2\,\overline{NM}^2 = \overline{OM}^2$$

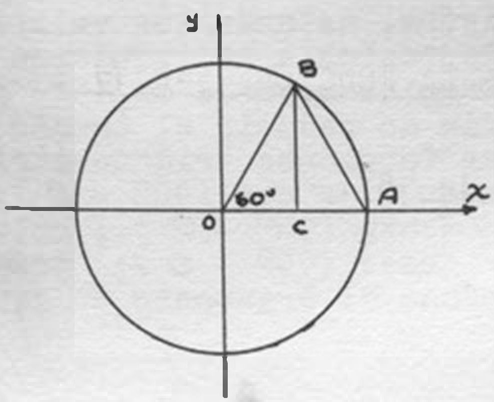
por consiguiente

$$NM = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Reemplazando el valor de $\overline{NM}$,por sen 45°, como se supuso, se tendrá finalmente:

$$\text{sen } 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

ii) <u>Cálculo del seno de 60°</u>



Consideremos el OCB, - rectángulo en C en el que: OB = 1 por ser radio de la circunferencia trigonométrica; OC = $\frac{1}{2}$ por proporcionalidad entre ángulos y lados opuestos de un triangulo.

En él: sen 60^{o} = BC . Aplicando al OCB la relación pitagórica resulta:

$$\overline{BC}^2 + (\tfrac{1}{2})^2 = 1$$

$$\overline{BC}^2 = 1 - 1/4 = 3/4$$

$$\text{sen } 60^{o} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

66.- TABLAS DE LOS VALORES NATURALES DE LAS FUNCIONES TRIGONOMETRICAS.-

Las relaciones vistas para el seno, coseno y tangente de ángulos simétricos, que difieren en 180^{o}, y suplementarios, junto a las que verifican la cotangente, secante y cosecante, permiten conocer el valor de una de éstas funciones para un argumento θ cualquiera, si se conoce el correspondiente valor para un argumento θ' que pertenezca al primer cuadrate. En virtud de estas propiedades resulta necesario conocer tan solo los valores de dichas funciones en el primer cuadrante.

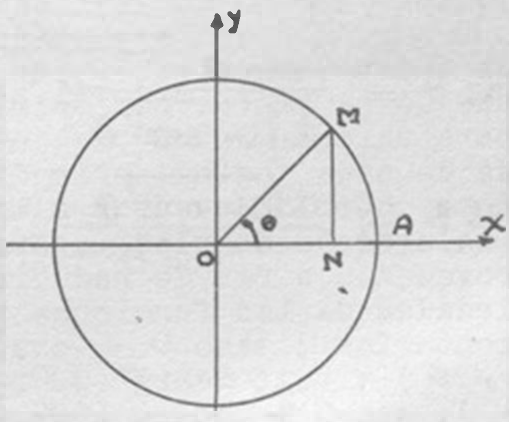
Las tablas matemáticas que empleamos cuentan con una tabla de valores naturales de las funciones trigonométricas (tabla VI; págs. 100). En estas líneas explicaremos escuetamente su uso. En cada página aparecen tabulados los correspondientes valores de las funciones seno, coseno, tangente, cotangente, secante y cosecante; en ese orden y conforme a los encabezamientos de las respectivas columnas. El argumento de la tabla, es decir la medida del ángulo, aparece para valores de 0^{o} a 44^{o}, en la parte superior izquierda de cada página, estando los valores en minutos, de 0' a 60' dispuestos a la izquierda de arriba abajo. Para valores de ángulos mayores de 45^{o} y hasta 89^{o} se han aprovechado, a fin de reducir el tamaño de la tabla, las propiedades de las funciones trigonométricas de ángulos complementarios : seno θ = cos $(90^{o} - \theta)$; cos θ = sen $(90^{o} - \theta)$; tagθ=cotg $(90^{o} - \theta)$; cotg θ = tag $(90^{o} - \theta)$; sec θ = cosec $(90^{o} - \theta)$; cosec θ = sec $(90^{o} - \theta)$; leyéndose el argumento en grados en la parte inferior derecha de cada página, estando los valores en minutos de 0' a 60' dispuestos a la derecha, de abajo hacia arriba, y los encabezamientos de las columnas al pié de cada una de ellas, indicando la co-función de la que figura en la parte superior. Así, si en la parte superior de una columna figura SENO, en la parte inferior se leerá COSENO, indicando así que una determinada cantidad de dicha columna indica el valor del seno de un ángulo que se lee en grados en la parte superior izquierda de la tabla, y en minutos a la izquierda; indicando asimismo el coseno de un ángulo que se lee en grados en la parte inferior derecha de la tabla y en minutos a la derecha.

Los valores en grados que aparecen respectivamente en la parte superior derecha e inferior izquierda de la tabla, si bien son útiles ya que evitan una reducción al primer cuadrante, deben emplearse con cuidado, recordando en cada caso el signo de las correspondientes funciones para dichos argumentos.

67.- RELACIONES ENTRE LAS FUNCIONES TRIGONOMETRICAS DE UN MISMO ANGULO.

Entre los valores de las distintas funciones trigonométricas de un mismo ángulo, existen relaciones que permiten conocer el valor de todas cuando se conoce una de ellas.-

Consideremos una vez más, para determinar estas relaciones, la circunferencia trigonométrica:



Dado un arco $\widehat{AM}$ al que corresponde un ángulo central θ , bajando desde M , extremo del arco, una perpendicular al eje de las x , queda formado el triángulo rectángulo ONM que tiene por catetos sen θ , cos θ y por hipotenusa la unidad. Aplicando en él el teorema de Pitágoras, se tiene la condición fundamental:

$$\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1 \qquad (1)$$

Si además de ésta consideramos la relación ya vista

$$\operatorname{tag}\theta = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} \qquad (2)$$

tendremos los elementos necesarios para expresar cualquier función trigonométrica en función de una determinada.

De la (1) se expresa el valor del seno en función del coseno y viceversa; y por la (2) se tendrá para estos casos, el correspondiente valor de la tangente.

Se tiene así:

$$\operatorname{sen}\theta = \pm\sqrt{1 - \cos^2\theta}$$

$$\cos\theta = \pm\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2\theta}$$

$$\operatorname{tag}\theta = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\pm\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2\theta}}$$

$$\operatorname{tag}\theta = \frac{\pm\sqrt{1 - \cos^2\theta}}{\cos\theta}$$

La doble determinación de la raíz permanecerá ambigua si se conoce tan solo el valor de la función; debiendo conocerse el arco θ, ó por lo menos en que cuadrante vive, para determinar el signo correspondiente a cada uno de los primeros miembros.

Si nuestro dato es tag θ , para determinar el valor de sen θ y de cos θ , procederemos de la siguiente manera:

Dividiendo ambos miembros de la (1) por $\text{sen}^2\theta$:

$$1 + \frac{\cos^2\theta}{\text{sen}^2\theta} = \frac{1}{\text{sen}^2\theta}$$ o lo que es lo mismo

$$1 + \frac{1}{\text{tag}^2\theta} = \frac{1}{\text{sen}^2\theta}$$

$$\frac{\text{tag}^2\theta + 1}{\text{tag}^2\theta} = \frac{1}{\text{sen}^2\theta}$$

$$\text{sen}^2\theta = \frac{\text{tag}^2\theta}{\text{tag}^2\theta + 1}$$

$$\text{sen}\,\theta = \frac{\text{tag}\,\theta}{\pm\sqrt{\text{tag}^2\theta + 1}}$$

Para determinar el valor del coseno en función de la tangente se tiene, dividiendo ambos miembros de la (1) por $\cos^2$

$$\frac{\text{sen}^2\theta}{\cos^2\theta} + 1 = \frac{1}{\cos^2\theta}$$

$$tg^2\theta + 1 = \frac{1}{\cos^2\theta}$$

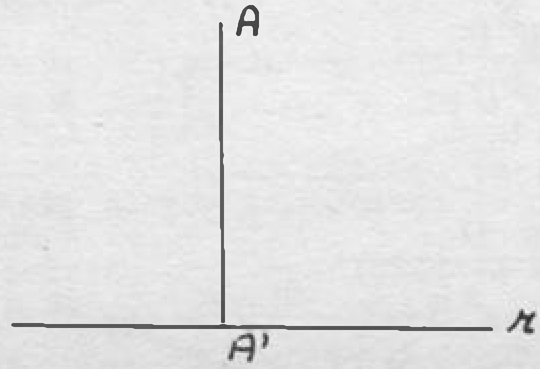
$$\cos^2\theta = \frac{1}{tag^2\theta + 1}$$

$$\cos\theta = \frac{1}{\pm\sqrt{1 + tag^2\theta}}$$

En este caso subsiste también la doble determinación de la raíz debiendo atribuirse el signo que presente la correspondiente función en cada cuadrante, según sea el valor de θ .

68.- TEOREMA DE LAS PROYECCIONES

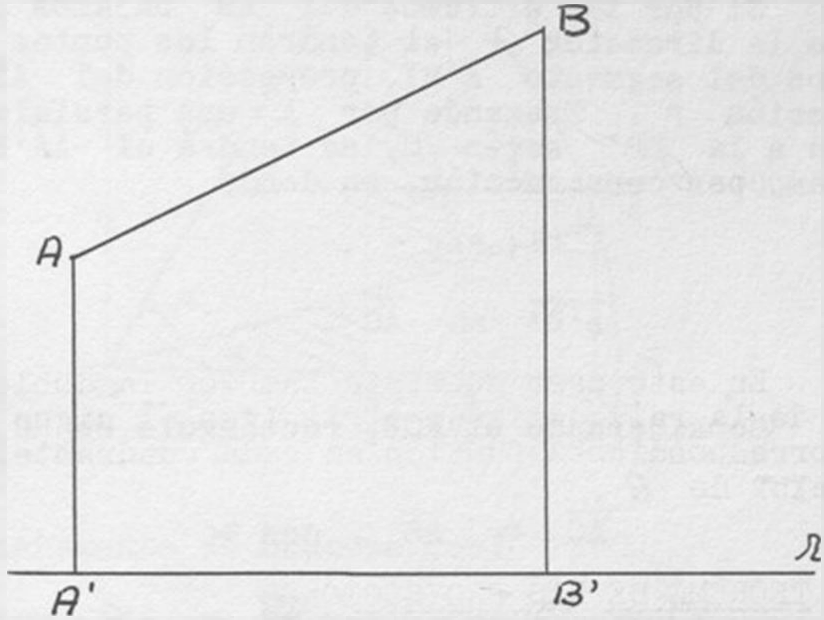
Se llama proyección de un punto sobre una dirección, al pié de la perpendicular bajada desde el punto a la dirección.



Así, en la figura se dirá que A' es la proyección de A sobre la dirección r , escribiéndose

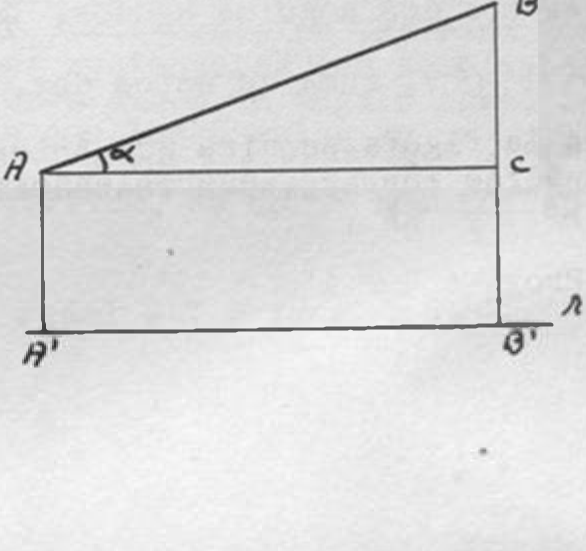
$$Proy_r\ A = A'$$

Se llama <u>proyección de un segmento sobre una dirección</u>, el segmento que tiene por extremos las proyecciones de los puntos extremos del segmento en cuestión.



Así se dirá que A' B' es la proyección de AB sobre la dirección r , si A' y B' son respectivamente las proyecciones de A y B sobre la dirección r.

La medida de A' B' , proyección de AB sobre la dirección r , se obtiene multiplicando la medida del segmento AB por el coseno del ángulo que forma la dirección AB con la dirección r . Este es el enunciado del llamado teorema de las proyecciones, que pasamos a demostrar seguidamente



Consideremos un segmento AB y una dirección r, denotando con α al ángulo que forman estas dos direcciones.

Si por los extremos del AB bajamos perpendiculares a la dirección r se tendrán los puntos A', B' extremos del segmento A'B', proyección del AB sobre la dirección r . Trazando por A una paralela a r , que corta a la BB' según C, se tendrá el AA'B'C, paralelogramo por construcción, en donde

$$\overline{A'B'} = \overline{AC}$$

Considerando el ACB, rectángulo en C, se tiene:

$$\overline{AC} = \overline{AB} \cdot \cos \alpha$$

Resultando

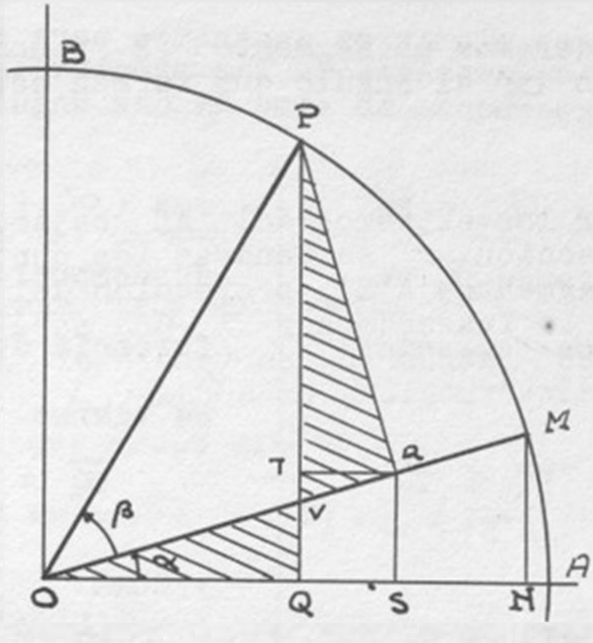
$$\overline{A'B'} = \overline{AB} \cdot \cos \alpha$$

c. q. d.

69.- SENO Y COSENO DE LA SUMA DE LOS ANGULOS.

Consideremos dos ángulos agudos, α y β ; siendo el ángulo ($\alpha + \beta$), suma de estos dos, también agudo.

Supongamos, empleando los elementos de la figura, que a estos ángulos corresponden respectivamente los arcos $\overset{\frown}{AM}$, $\overset{\frown}{MP}$ y $\overset{\frown}{AP}$.



Inmediatamente se observa que:

$$\operatorname{sen}\,\alpha = \overline{MN} \quad ; \quad \cos\,\alpha = \overline{ON}$$

$$\operatorname{sen}\,\beta = \overline{PR} \quad ; \quad \cos\,\beta = \overline{OR}$$

$$\operatorname{sen}\,(\alpha+\beta) = \overline{PQ} \quad ; \quad \cos\,(\alpha+\beta) = \overline{OQ}$$

Nuestro problema consiste en determinar el seno y coseno de $(\alpha+\beta)$ en función del seno y coseno de α y de β.

Consideremos primeramente los triángulos OQV rectángulo en Q, y PRV, rectángulo en R. Para demostrar que estos dos triángulos rectángulos son semejantes bastará con demostrar que tienen ambos un ángulo agudo igual. Se observa inmediatamente que los ángulos en V son iguales, por opuestos por el vértice, de donde resulta Q O V = V P R o sea:

ángulo en P del R T P igual a α

Con estos elementos encaramos para mayor comodidad una demostración paralela de las propiedades buscadas para el seno y coseno de la suma de dos ángulos.

sen $(\alpha + \beta) = \overline{PQ}$

descomponiendo $\overline{PQ}$ en suma de dos segmentos se tiene:

$$\overline{PQ} = \overline{PT} + \overline{TQ}$$

y como

$$\overline{TQ} = \overline{RS}$$

se tiene

$$\overline{PQ} = \overline{PT} + \overline{RS}$$

cos $(\alpha + \beta) = \overline{OQ}$

descomponiendo $\overline{OQ}$ en diferencia de dos segmentos

se tiene:

$$\overline{OQ} = \overline{OS} - \overline{QS}$$

y como

$$\overline{QS} = \overline{TR}$$

se tiene

$$\overline{OQ} = \overline{Os} - \overline{TR}$$

Expresando estos segmentos en función de los elementos de nuestro problema, según

$$\overline{PT} = \overline{PR} \,.\, \cos\alpha = \operatorname{sen}\beta \,.\, \cos\alpha$$
$$\overline{RS} = \overline{OR} \,.\, \operatorname{sen}\alpha = \cos\beta \,.\, \operatorname{sen}\alpha$$

$$\overline{OS} = \overline{OR} \,.\, \cos\alpha = \cos\beta \,.\, \cos\alpha$$
$$\overline{TR} = \overline{PR} \quad \operatorname{sen}\alpha = \operatorname{sen}\beta \,.\, \operatorname{sen}\alpha$$

se tendrá:

(1) $\operatorname{sen} \alpha + \beta) = \operatorname{sen}\alpha \cos\beta + \operatorname{sen}\beta \cos\alpha$

(2) $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta$

70.- SENO Y COSENO DE LA DIFERENCIA DE DOS ANGULOS.

Sustituyendo en la (1), β por $(-\beta)$ se tendrá $\operatorname{sen}(\alpha-\beta) = \operatorname{sen}\alpha \cos(-\beta) + \operatorname{sen}(-\beta) \cos\alpha$; expresando ésta en función de valores trigonométricos de α y de β, se tendrá en virtud de las relaciones vistas para arcos simétricos:

$$(3) \quad \operatorname{sen}(\alpha-\beta) = \operatorname{sen}\alpha \cos\beta - \operatorname{sen}\alpha \cos\beta$$

Sustituyendo ahora en la (2), β por $(-\beta)$

se tendrá

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha \cos(-\beta) - \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}(-\beta)$$

o sea

$$(4) \quad \cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha \cos\beta + \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta$$

4.- Tangente de la suma y diferencia de los ángulos.

Relacionando la (1) con la (2) se obtiene para la tangente de la suma de dos ángulos la siguiente relación:

$$(5) \quad \operatorname{tag}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{tag}\alpha + \operatorname{tag}\beta}{1 - \operatorname{tag}\alpha \operatorname{tag}\beta}$$

Relacionando la (3) con la (4) se tendrá para la diferencia de dos ángulos

$$(6) \quad \operatorname{tag}(\alpha-\beta) = \frac{\operatorname{tag}\alpha - \operatorname{tag}\beta}{1 + \operatorname{tag}\alpha \operatorname{tag}\beta}$$

71.- SENO, COSENO Y TANGENTE DEL DUPLO DE UN ANGULO.

Considerando en la (1), (3) y (5)

se tiene:

(7) $\operatorname{sen} 2\alpha = 2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha$

(8) $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha$

(9) $\operatorname{tag} 2\alpha = \dfrac{2 \operatorname{tag} \alpha}{1 - \operatorname{tag}^2\alpha}$

72.- SENO, COSENO Y TANGENTE DEL ANGULO MITAD EN FUNCION DEL ANGULO ENTERO.

De la expresión del coseno del angulo duplo (8) resulta una interesante relación

$$\cos \alpha = \cos^2 \frac{\alpha}{2} - \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2} \qquad \text{(a)}$$

recordando ahora la relación fundamental:

$$1 = \cos^2 \frac{\alpha}{2} + \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2} \qquad \text{(b)}$$

resulta sumando m.a.m. (a) y (b)

$$1 - \cos \alpha = 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}$$

de donde

$$(10) \qquad \cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}$$

si en vez de sumar (a) con (b) restamos (a) de (b) resulta:

$$1 - \cos \alpha = 2 \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2}$$

de donde:

$$(11) \qquad \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}$$

y finalmente relacionando (10) y (11)

$$(12) \quad \operatorname{tag} \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{1 + \cos\alpha}}$$

73.- <u>FORMULAS PARA LA TRANSFORMACION EN PRODUCTO DE LA SUMA O DIFERENCIA DE LOS SENOS O COSENOS.</u>

Recordemos las fórmulas que obtuviéramos para expresar el seno y coseno de la suma o diferencia de los ángulos:

$$\operatorname{Sen}(\alpha + \beta) = \operatorname{sen}\alpha \cos\beta + \cos\alpha \operatorname{sen}\beta$$

$$\operatorname{Sen}(\alpha - \beta) = \operatorname{sen}\alpha \cos\beta - \cos\alpha \operatorname{sen}\beta$$

$$\operatorname{Cos}(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta$$

$$\operatorname{Cos}(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cos\beta + \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta$$

Efectuando la suma y la diferencia de las dos primeras y procediendo analogamente para las dos segundas se tiene:

$$\operatorname{Sen}(\alpha + \beta) + \operatorname{Sen}(\alpha - \beta) = 2 \operatorname{sen}\alpha \cos\beta$$

$$\operatorname{Sen}(\alpha + \beta) - \operatorname{sen}(\alpha - \beta) = 2 \cos\alpha \operatorname{sen}\beta$$

$$\operatorname{Cos}(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) = 2 \cos\alpha \cos\beta$$

$$\operatorname{Cos}(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta) = 2 \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta$$

Designando ahora:

$$p = (\alpha + \beta) \quad , \quad q = (\alpha - \beta)$$

resulta, sumando o restando m.a.m. estos dos:

$$\alpha = \frac{p + q}{2} \quad ; \beta = \frac{p - q}{2}$$

Espresando las fórmulas anteriores en términos de p y q se tendrá:

$$\operatorname{sen} p + \operatorname{sen} q = 2 \operatorname{sen} \left(\frac{p+q}{2}\right) \cos \left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$\operatorname{sen} p - \operatorname{sen} q = 2 \operatorname{sen} \left(\frac{p+q}{2}\right) \cos \left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$\cos p + \cos q = 2 \cos \left(\frac{p+q}{2}\right) \cos \left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$\cos p - \cos q = 2 \operatorname{sen} \left(\frac{p+q}{2}\right) \operatorname{sen} \left(\frac{p-q}{2}\right)$$

Estas fórmulas que expresan según un monomio, expresiones binómicas, tienen su principal aplicación en los problemas del cálculo trigonométrico.

74.- NUMEROS COMPLEJOS.

Dentro del campo de los números reales carecen de sentido expresiones tales como $\sqrt{-4}$; $\sqrt[6]{-5}$; lg -3 ; log -17.

A fin de poder efectuar tales operaciones, deberemos ampliar nuestro concepto de número, introduciendo a tal fin el concepto de número complejo.

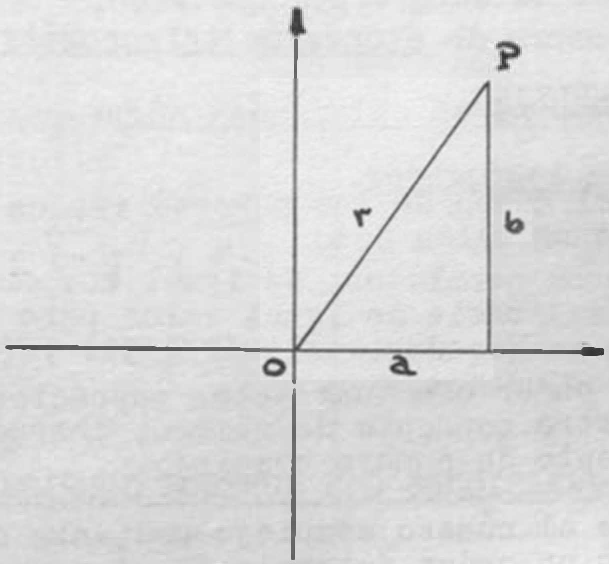
Definimos al número complejo mediante dos números reales, dados en un orden determinado. A estos dos números reales los llamaremos componentes del número complejo, y lo indicaremos así: $\alpha = (a\ ,\ b)$; en donde <u>a</u> es la componente real, y <u>b</u> la componente imaginaria, siempre en ese orden.

En particular un número complejo cuya componente imaginaria sea cero $\alpha = (a,\ o\ )$ designa al número real a . Un número complejo cuya componente real sea cero $\alpha = (o,\ b\ )$ se dirá imaginario puro. El más simple de éstos $\alpha = (\ 0,1\ )$ recibe el nombre de unidad imaginaria y lo designaremos siempre mediante la letra i .

<u>Representación geométrica</u>.

Así como existe una correspondencia entre números reales y puntos de una recta, los números complejos corresponden a los puntos del plano a través de los valores de sus dos componentes.

Un punto del plano P queda determinado cuando se conocen sus proyecciones sobre los dos ejes, que son las componentes del número complejo que corresponde a P. Asimismo el punto P quedará determinado cuando se conozca la magnitud del segmento OP que forma con el origen y el ángulo W que forma dicho segmento con el eje de las x .



Resulta de ésto que un número complejo queda determinado dado un par de números (a, b), o dada la medida OP, y el ángulo W . Denominamos $\overline{OP}$ según r , <u>módulo</u> del comple jo; siendo:

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}$$

; y el ángulo W, <u>argumento del complejo</u>, siendo $w = \text{arc. tag}\ \frac{b}{a}$.

Expresión de un número complejo.

Por ser un número complejo el resultado de sumar un número real a un imaginario puro, de ahora en adelante expresaremos al número complejo (a,b) según

$$(a,b) = (a,o) + (o,b) = a + b_i$$

en donde i representa a la unidad imaginaria ya introducida. Esta forma recibe el nombre de <u>expresión binómica</u> de un número complejo.

Si en ésta sustituimos a y b por sus valores en términos del módulo y argumento, se tiene como expresión de un número complejo,

$$r\ (\cos W + i\ \operatorname{sen} W)$$

que recibe el nombre de <u>expresión trigonométrica</u> de un número complejo.

Complejos conjugados.

Dos números complejos, de igual componente real y de componente imaginaria de igual valor pero distinto signo, se dirán conjugados. Así: $(2 + 3i)$ y $(2 - 3i)$ son dos complejos conjugados.

OPERACIONES CON NUMEROS COMPLEJOS

75.- SUMA DE DOS NUMEROS COMPLEJOS.

$$(a + b\ i) + (c + d\ i) = (a + c) + (b + d)\ i$$

De donde resulta la siguiente regla: Se llama suma de dos números complejos $(a + bi)$ y $(c + di)$ a un tercer número complejo que tiene por componente real la suma de las respectivas componentes reales, y por componente imaginaria la suma de las respectivas componenentes imaginarias. En forma similar queda definida la sustracción entre dos números complejos.

OBSERVACION: Como un número real no es sino un caso particular de número complejo, mediante la anterior regla podremos efectuar la suma entre un número real y un número complejo.

Ejemplos:

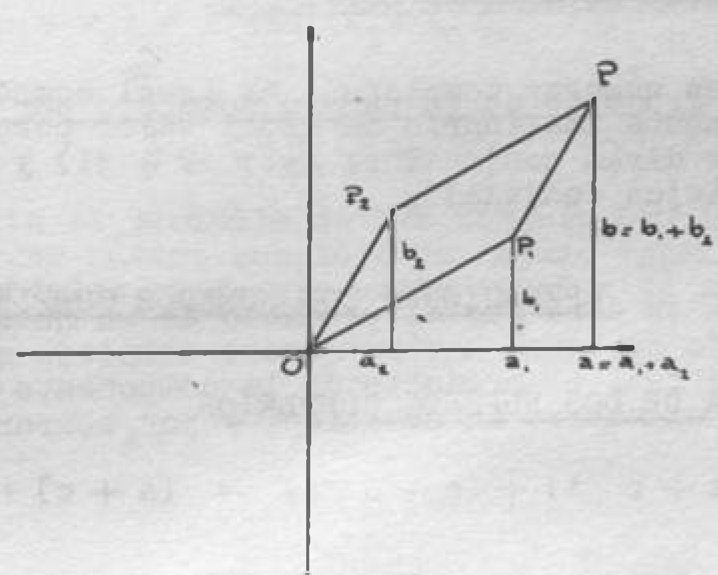
$$(3 + 5i) + (2 - 3i) = (3 + 2) + (5 - 3)i$$

$$= 5 + 2i$$

$$3 + (5 + 2i) = (3 + 5) + 2i$$

$$= 8 + 2i$$

<u>Representación geométrica de la suma de dos números complejos</u>.



Sean los dos números complejos (a_1 , b_1) y (a_2 , b_2) que corresponden respectivamente a los puntos P_1 y P_2

Vista la correspondencia entre números complejos y puntos del plano, el número complejo suma de los dos considerados, corresponderá a un punto P que tiene por coordenadas la suma de las respectivas coordenadas de P_1 y P_2 .

Expresión de la unidad imaginaria i .

Definimos para la unidad imaginaria i , el valor que resulta de considerar $i^2 = -1$. De acuerdo a esta definición se tendrá para las potencias sucesivas de i:

$$i^2 = -1$$

$$i^3 = i^2 \times i = -1 \, . \, i = -i$$

$$i^4 = i^3 \times i = -i \, . \, i = -i^2 = -(-1) = 1$$

$$i^5 = i^4 \times i = 1 \, . \, i = i$$

76.- PRODUCTO DE NUMEROS COMPLEJOS.

a) Producto de un número complejo por un número real.

$$c \, . \, (a + b\,i) = a\,c + b\,c\,i$$

Así se dirá que el producto de un número real por un complejo es igual a otro número complejo que tiene por componente real el producto de la componente real del complejo por el número en cuestión, y por componente imagina ria el producto de la componente imaginaria multiplicada por el número real.

b) Producto de dos números complejos.

i) Expresión binómica del producto de números complejos.

$$(a + bi)\,(c + di) = a\,c + a\,d\,i + b\,c\,i + b\,d\,i^2$$

$$= (a\,c - b\,d) + i(a\,d + b\,c)$$

Se procede en este caso según las reglas vistas para el producto entre binomios, atendiendo los valores hallados para las distintas potencias de la unidad imaginaria.

ii) Expresión trigonométrica del producto de dos números complejos.

$$r_1\,(\cos w_1 + i\,\operatorname{sen} w_1)\cdot r_2\,(\cos w_2 + i\,\operatorname{sen} w_2) =$$

$$= r_1 r_2 \left[(\cos w_1 \cos w_2 - \operatorname{sen} w_1 \operatorname{sen} w_2) + i(\operatorname{sen} w_1 \cos w_2 + \cos w_1 \operatorname{sen} w_2)\right]$$

$$= r_1 r_2 \left[\cos (w_1 + w_2) + i\,\operatorname{sen} (w_1 + w_2)\right]$$

de donde resulta el producto de dos números complejos igual a un tercer número complejo de modulo igual al producto de los módulos, y de argumento igual a la suma de los argumentos.

77.- COCIENTE ENTRE NUMEROS COMPLEJOS.

De la definición de producto entre dos números complejos se desprende que el cociente de dividir un número complejo α_1, por otro complejo α_2 será un nuevo número complejo α que tiene por módulo el cociente de los modulos, y por argumento la diferencia de los argumentos.

Para efectuar el cociente entre dos números complejos, expresados en su forma binómica, se procederá de la siguiente manera:

Sea nuestro problema el de calcular:

$$\frac{a + b\ i}{c + d\ i} = \alpha$$

multiplicando numerador y denominador del primer miembro por un número conveniente, y eligiendo éste, conjugado del denominador se tendrá:

$$\frac{(a + b\ i)\ (c - d\ i)}{(c + d\ i)\ (c - d\ i)} = \frac{(ac + bd)\ +\ i\ (ad - bc)}{c^2 + d^2}$$

resultado que se expresa en términos del módulo r según

$$\frac{ac + bd}{r^2} + \frac{ad - bc}{r^2}\ i = \alpha$$

EJEMPLO:

$$\frac{2+3\ i}{1 -2\ i} = \frac{(2+3\ i)\ (1+2\ i)}{(1 - 2\ i)(1+2\ i)} =$$

$$= \frac{(2 - 6)\ \ + i\ (4 + 3)}{1^2 + 2^2} = \frac{-4}{5} + \frac{7}{5}\ i$$

78.- POTENCIAS DE NUMEROS COMPLEJOS.

Supongamos se desee calcular la potencia n-ésima (n un número natural) de un número complejo

Expresado éste en su forma trigonométrica se tiene:

$$\alpha^n = \left[r \cdot (\cos w + i \operatorname{sen} w) \right]^n$$

$$= r^n (\cos w + i \operatorname{sen} w)^n$$

desarrollando la potencia del binomio, y vistas las relaciones que expresan el seno y el coseno de la suma de n ángulos se tendrá:

$$\left[r (\cos w + i \operatorname{sen} w) \right]^n = r^n (\cos n w + i \operatorname{sen} n w)$$

fórmula llamada de MOIVRE, que permite calcular las potencias enteras de un número complejo dado en su expresión trigonométrica.

Si el número α estuviera dado en su expresión binómica, $\alpha = a + b i$, se podrá calcular la potencia n-ésima del mismo aplicando la fórmula de Newton vista para el desarrollo de la potencia de un binomio y agrupando los términos del desarrollo conforme a los valores de las potencias de la unidad imaginaria.

79.- RAICES DE LOS NUMEROS COMPLEJOS.

Determinar la raíz n-ésima de un número complejo significa encontrar otro número complejo tal que su potencia n-ésima sea igual al número dado. Así, para que sea

$$\sqrt[n]{r\ (\cos w + i\ \text{sen}\ w)} = \rho\ (\cos \varphi + i\ \text{sen}\ \varphi)$$

deberá ser

$$\left[(\cos \varphi + i\ \text{sen}\ \varphi)\right]^n = r\ (\cos w + i\ \text{sen}\ w)$$

La condición para que esta igualdad se cumpla, es que los módulos sean iguales, y que los argumentos correspondan a ángulos congruentes, es decir sean iguales o difieran en un número entero de circunferencias.

Será entonces:

$$\rho = \sqrt[n]{r} \qquad ; \qquad \varphi = \frac{w}{n} + \frac{2\,k\,\pi}{n}$$

De esta manera queda perfectamente determinado el módulo del complejo raiz n-ésima, por la raiz n-ésima aritmética del módulo del complejo dado; en la expresión del argumento figura la constante indeterminada k , que admite valores enteros pero limitados al campo $0 \leq K \leq (n-1)$

ya que otros valores enteros de la misma conducirán a argumentos ya determinados.

Resulta de ésto que todo número complejo tiene n raices complejas distintas, que tienen como modulo, la raíz aritmética del módulo del complejo dado, y como argumento:

$$\frac{w}{n}\ ,\ \frac{w + 2\pi}{n}\ ,\ \frac{w + 2 \times 2\,\pi}{n}, \ldots\ ,\ \frac{w + 2 \times (n-1) \cdot \pi}{n}$$

Se escribirá así en general:

$$\sqrt[n]{r\ (\cos w + i\ \text{sen}\ w)} = \sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{w}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) + i\ \text{sen}\left(\frac{w}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)\right]$$

donde k toma los valores 0, 1, 2, .. , n-1, resultando las siguientes raices:

$$r_1 = \sqrt[n]{r} \quad \left[\cos \frac{w}{n} + i \operatorname{sen} \frac{w}{n} \right]$$

$$r_2 = \sqrt[n]{r} \quad \left[\cos \left(\frac{w}{n} + \frac{2\pi}{n}\right) + i \operatorname{sen} \left(\frac{w}{n} + \frac{2 . \pi}{n} \right) \right]$$

$$r_3 = \sqrt[n]{r} \quad \left[\cos \left(\frac{w}{n} + \frac{2 \times 2\pi}{n}\right) + i \operatorname{sen} \left(\frac{w}{n} + \frac{2 \cdot 2\pi}{n}\right) \right]$$

$$r_n = \sqrt[n]{r} \quad \left[\cos \left(\frac{w}{n} + \frac{(n-1)2\pi}{n}\right) + i \operatorname{sen} \left(\frac{w}{n} + \frac{(n-1)2\pi}{n}\right) \right]$$

80.- RAICES DE NUMEROS REALES.

Expresando un número real bajo la forma más general de un número complejo, será posible extender la operación de radicación al caso, hasta ahora vedado, de raices de índice par de números negativos.

Consideremos el problema de calcular la raiz cuadrada de $-a$ siendo a, una cantidad positiva. Expresado este número real en su forma trigonométrica

$$-a = a \; (\cos 180 + i \operatorname{sen} 180)$$

su raiz cuadrada se calculará según la forma general que se acaba de exponer.

$$\sqrt{-a} = \sqrt{a \; (\cos)180 + i \;\; \operatorname{sen} \;\; 180 \;)}$$

$$r_1 = \sqrt{a} \; (\cos 90 + i \operatorname{sen} 90 \;)$$

$$r_2 = \sqrt{a}\ (\cos 270 + i \text{ sen } 270)$$

Expresando r_1 y r_2 en la forma binómica se tendrá:

$$r_1 = 0 + i\sqrt{a} = i\sqrt{a}$$

$$r_2 = 0 - i\sqrt{a} = -i\sqrt{a}$$

que justifica la siguiente igualdad

$$\sqrt{-a} = \pm i\sqrt{a}$$

81.- LOGARITMO DE UN NUMERO COMPLEJO.

Consideremos el problema de calcular el logaritmo natural de un número complejo dado en su expresión binómica

$$r\ (\cos w + i \text{ sen } w)$$

Aceptando la relación $e^{ix} = \cos x + i \text{ sen } x$, que demostraremos más adelante en estos apuntes, resulta: $e^{i \cdot 2\pi k} = \cos 2\pi k + i \text{ sen } 2\pi k = 1$, lo que permite la siguiente expresión dellogaritmo de un número complejo:

$$\log = \log\left[r\ (\cos w + i \text{ sen } w)\right] =$$

$$= \log\left[r \cdot e^{iw}\right]$$

$$= \log\left[r \cdot e^{iw} \cdot e^{i2k\pi}\right]$$

$$= \log \left[r \cdot e^{i(w + 2k\pi)} \right]$$

$$= \log r + i\,(w + 2k\pi) \log.\ e$$

$$\log \left[r(\cos w + i \operatorname{sen} w) \right] = \log r + i\,(w + 2k\pi)$$

$$(k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$$

de donde resulta que el logaritmo de un número complejo, dado en su forma trigonométrica, es otro número complejo dado en su expresión binómica, cuya componente real es igual al logaritmo del módulo, y cuya coeficiente de i resulta de sumar al argumento original w, un número entero de giros de circunferencia, o sea: $2k\pi$.

Si se asigna a la constante indeterminada k, el valor 0, se obtiene el valor principal del logaritmo de un número complejo.

$$\log \left[r\,(\cos w + i \operatorname{sen} w) \right] = \log r + i\,w$$

82.- ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO.

La forma más general de la ecuación de segundo grado con coeficientes reales es

$$a x^2 + b x + c = 0 \qquad (1)$$

en ésta observamos que el primer miembro es casi el desarrollo de $(2ax + b)^2$, debidamente adaptado mediante la sustracción del término b^2 y el agregado del término $4ac$. Se tiene así:

$$(4\ 2^2 x^2 + 4abx + b^2) - (b^2 - 4ac) = (2ax + b)^2 - (b^2 - 4ac)$$

escribiendo el segundo término del segundo miembro en forma de cuadrado (el cuadrado de su raíz cuadrada), la (2) podrá escribirse:

$$(2\,a^2\,x^2 + b\,)^2 - \left(\sqrt{b^2 - 4\,a\,c}\,\right)^2 = 0$$

Recordando que una diferencia de cuadrados puede escribirse según el producto de la suma de los números por su diferencia, la ecuación anterior podrá escribirse:

$$(\,2\,a\,x + b + \sqrt{b^2 - 4\,a\,c}\,)\,(\,2\,a\,x + b - \sqrt{b^2 - 4\,a\,c}\,) = 0$$

Los valores que satisfacen esta condición, son los que anulan a uno de los dos factores, es decir cumplen la condición:

$$2\,a\,x + b + \sqrt{b^2 - 4\,a\,c} = 0$$

de donde resulta: $\quad x_1 = \dfrac{-\,b - \sqrt{b^2 - 4\,a\,c}}{2\,a}$

o la condición: $\quad 2\,a\,x + b - \sqrt{b^2 - 4\,a\,c} = 0$

de donde resulta: $\quad x_2 = \dfrac{-\,b + \sqrt{b^2 - 4\,a\,c}}{2\,a}$

expresiones ambas que se reducen a una única, que se denomina <u>resolvente</u> de la ecuación de segundo grado

$$x = \frac{-\,b \pm \sqrt{b^2 - 4\,a\,c}}{2\,a}$$

De la observación de esta resolvente se concluye que la ecuación general de segundo grado admite dos raíces o valores de la variable que las satisfacen; la forma de las cuales dependen de la expresión $b^2 - 4\,a\,c$, que recibe el nombre de discriminante de la ecuación de segundo grado.

Si el discriminante es positivo, la ecuación admite dos raices reales y distintas.

Si el discriminante es igual a cero, la ecuación admitirá una raíz real que se dirá doble.

Si el discriminante es negativo, la determinación de la raíces requerirá el cálculo de la raíz cuadrada de un número negativo, lo que hace que la ecuación tenga dos raices complejas conjugadas.

Ejemplo:

i) Consideremos el problema de determinar las raices de la siguiente ecuación de segundo grado

$$5\,x^2 + 3\,x - 2 = 0$$

aplicando la resolvente se obtiene:

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 40}}{10} = \frac{-3 \pm 7}{10}$$

que me conduce a los siguientes valores para las raices:

$$x_1 = \frac{-3 + 7}{10} = \frac{4}{10}$$

$$x_2 = \frac{-3 - 7}{10} = -1$$

ii) Determinar las raices de la ecuación

$$2x^2 + 4x + 2 = 0$$

aplicando la resolvente se tiene

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 16}}{4} = \frac{-4 \pm \sqrt{0}}{4}$$

$$x = \frac{-4 \pm 0}{4}$$

$$x_1 = x_2 = \frac{-4}{4} = -1$$

Se dirá en este caso que $x = -1$ es una raiz real doble de la ecuación $2x^2 + 4x + 2 = 0$.

iii) Determinar las raices de la ecuación

$$2x^2 - 6x + 5 = 0$$

aplicando la resolvente se tiene

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 40}}{4} = \frac{6 \pm \sqrt{-4}}{4}$$

$$x = \frac{6 \pm i\sqrt{4}}{4} = \frac{6 \pm i\,2}{4}$$

$$x_1 = \frac{6 + 2i}{4} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}i$$

$$x_2 = \frac{6 - 2i}{4} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}i$$

siendo en este caso x_1 y x_2, raices de la ecuación, dos complejos conjugados .

83.- PROPIEDADES DE LAS RAICES DE UNA ECUACION DE SEGUNDO GRADO.

Vista la expresión de las mismas según

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad ; \quad x_2 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

resulta sumando m.a.m.

$$x_1 + x_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} + \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$x_1 + x_2 = \frac{-2b}{2a} = \frac{-b}{a}$$

que nos dice: en una ecuación de segundo grado, la suma de las raices es igual al cociente de dividir el coeficiente de x, tomado con el signo cambiado, por el coeficiente del término en x^2 .

Si efectuamos el producto $x_1 \cdot x_2$ se tendrá:

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \cdot \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$= \frac{b^2 - b\sqrt{b^2-4ac} + b\sqrt{b^2-4ac} - (\sqrt{b^2-4ac})^2}{4a^2}$$

$$= \frac{b^2-(b^2-4ac)}{4a^2} = \frac{b^2-b^2+4ac}{4a^2}$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{4\ a\ c}{4\ \ a^2} = \frac{c}{a}$$

que nos dice: en una ecuación de segundo grado, el producto de las raices es igual al cociente de dividir el término independiente por el coeficiente del término en x^2.

III PARTE

84.- PROGRESIONES.

Se dice que los elementos de una sucesión finita o indefinida de números

$$a_1 \ , \ a_2 \ , \ a_3 \ , \ldots , \ a_n \ , \ldots$$

constituyen una progresión cuando el valor de cada uno de los elementos queda determinado al conocerse la posición del mismo dentro de la sucesión.

85.- PROGRESION ARITMETICA.

Se dice que los elementos de una sucesión forman una progresión aritmética cuando cada término resulta de sumarle al anterior un número fijo que recibe el nombre de diferencia o razón de la progresión. Así, la sucesión de los números pares, $2, 4, 6, 8, .. , 2n \ , (2n+2), \ldots$ constituye una progresión aritmética de diferencia 2, ya que

$$4-2 = 6 - 4 = 8 - 6 = \ldots = (2n+2) - (2n) = 2$$

En una progresión aritmética genérica, de razón o diferencia d, $a_1 , a_2 , a_3 \ldots , a_n$

se tendrá por definición:

$$a_{h+1} = a_h + d$$

$$a_{h+2} = a_{h+1} + d$$

$$a_{h+k} = a_{h+k-1} + d$$

sumando miembro a miembro estas igualdades se tendrá, luego de cancelar aquellos términos que figuren en ambos miembros:

$$a_{h+k} = a_h + k\,d \qquad (1)$$

de donde:

$$a_h = a_{h+k} - k\,d \qquad (2)$$

Consideremos ahora dos términos de la progresión anterior que equidisten de los extremos: a_{1+k} y a_{m-k}

En virtud de la (1) y la (2) se tiene:

$$a_{1+k} = a_1 + k\,d \quad \text{y} \quad a_{n-k} = a_n - k\,d$$

sumando m.a.m. estas dos igualdades, y cancelando los términos comunes a ambos miembros, se tiene:

$$a_{1+k} + a_{n-k} = a_1 + a_n$$

que justifica la siguiente propiedad. La suma de dos términos que equidisten de los extremos en una progresión aritmética, es igual a la suma del primero más el último término de dicha progresión.

Aplicando la propiedad anterior podremos calcular el valor de la suma de los n primeros términos de una progresión aritmética de primer término a_1 y de diferencia d . Indicando con S_n el valor de dicha suma se tendrá:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$$

$$S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \ldots + a_1$$

Sumando m.a.m.

$$2\ S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + \ldots + (a_n + a_1)$$

resultando en virtud de la propiedad anterior:

$$2\ S_n = n\ (a_1 + a_n)$$

y finalmente:

$$S_n = \frac{n\ (a_1 + a_n)}{2}$$

fórmula que nos da el valor de la suma de los n primeros términos de una progresión aritmética, en función del valor del primer término, del último y del número de términos que se consideren. Si quisiéramos expresar S_n en función de a_1 , d_1 , y n ; sustituyendo en la anterior

$$a_n = a_1\ (n - 1)\ d$$

se tendrá:

$$S_n = n\ a_1 + \frac{n\ (n - 1)\ d}{2}$$

86.- PROGRESIONES GEOMETRICAS

Se dice que los elementos de una sucesión

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$$

constituyen una progresión geométrica, cuando cada término de la misma se deduce del anterior multiplicándolo por un número fijo llamado razón de la progresión. Así los elementos de una progresión geométrica quedan determinados al conocerse el primer término a_1, y la razón q.

Por la definición se tiene:

$$a_{h+1} = a_h \cdot q \quad ; \quad a_{h+2} = a_{h+1} \cdot q \quad \ldots ; \; a_{h+k} = a_{h+k-1} \cdot q$$

multiplicando m.a.m. estas igualdades y eliminando factores comunes a ambos miembros se tiene:

$$a_{h+k} = a_h \cdot q^k \qquad (3)$$

de la que resulta:

$$a_h = a_{h+k} \cdot q^{-k} \qquad (4)$$

Consideremos ahora dos términos de la progresión anterior que equidisten de los extremos; sean éstos a_{1+k} y a_{n-k}.

En virtud de la (3) y (4) se tendrá:

$$a_{1+k} = a_1 \cdot q^k \quad \text{y} \quad a_{n-k} = a_n \cdot q^k$$

multiplicando m.a.m. estas dos igualdades y simplificando, se tendrá:

$$a_{1+k} \cdot a_{n-k} = a_1 \cdot a_n$$

que nos dice: el producto de dos términos de una progresión geométrica, que equidisten de los extremos, es igual al valor del producto de dichos términos extremos.

Aplicando esta propiedad podremos calcular el valor del producto de los n primeros términos de una progresión geométrica.

$$P_n = a_1 \times a_2 \times .. \times a_n$$

$$P_n = a_n \times a_{n-1} \times \ldots \times a_1$$

$$P^2 n = (a_1 \cdot a_n)^n \quad \therefore \quad P_n = \sqrt{(a_1 \cdot a_n)^n}$$

<u>Suma de los n primeros términos de una progresión geométrica.</u>

Indicando dicha suma con S_n se tendrá

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + a_n \qquad (i)$$

multiplicando ambos miembros por q, razón de la proporción geométrica, se tiene:

$$q \cdot S_n = a_1 q + a_2 q + \ldots + a_{n-1} q + a_n \cdot q$$

$$q \cdot S_n = a_2 + a_3 + \ldots + a_n + a_{n+1} \qquad (ii)$$

restando la (i) de la (ii) y simplificando los términos comunes resulta:

$$S_n \cdot (q - 1) = a_{n+1} - a_1$$

de donde:

$$S_n = \frac{a_{n+1} - a_1}{q - 1}$$

y finalmente expresando a_{n-1} en términos de a_1 según $a_{n+1} = a_1 \cdot q^n$, se tendrá

$$S_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

la que se suele presentar, multiplicando numerador y denominador por (-1), en la forma:

$$S_n = a_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

y nos da una expresión para la suma de los n primeros términos de una progresión geométrica de primer término a_1 y de razón q.

87.- LIMITES.

Si se tiene una sucesión indefinida de números

$$a_1 , a_2 , a_3 , \ldots , a_n , \ldots$$

se dirá que la misma tiende al valor límite a, cuando la diferencia entre el término general de la sucesión y el límite de la misma, $a_n - a$, se haga tan pequeña como se quiera, a partir de un cierto n en adelante.

La definición rigurosa de límite nos dice:

a es el límite de la sucesión anterior si: dado un ε arbitrario positivo, existe un $n = v$ tal que, para todo $n > v$, la diferencia $a_n - a$ sea, en valor absoluto, menor que ε.

En fórmulas esto equivale a expresar:

$$|a_v - a| < \varepsilon \quad ; \quad |a_{v\ 1} - a| < \varepsilon ; \ldots ;$$

o sea, a partir de un $n = v$, en adelante

$$-\varepsilon < a_n - a < \varepsilon$$

o lo que es lo mismo

$$a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$$

que nos dice que, a partir de un n en adelante, es decir salvo un número finito de término, todos los términos de la sucesión se hallan dentro del intervalo de ancho 2ε, que tiene por centro el límite de la sucesión considerada.

Así, si a es el límite de la sucesión $\{a_n\}$, se escribirá:

$$\lim_{n \to \infty} a_n = a$$

que se lee: el límite de la sucesión $\{a_n\}$, cuando n crece indefinidamente, es el valor finito a.

Ejemplo:

1) La sucesión

$$1 \ , \ 1/2 \ , \ 1/3 \ , \ldots , \frac{1}{n} \ , \ldots$$

tiene por límite el valor 0, ya que la diferencia $\left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n}$, se mantiene, a partir de un cierto n en adelante, (que depende de ε) menor que cualquier ε arbitrario positivo.

Tomando $\varepsilon = 0{,}0001$ observe que

$$\frac{1}{n} < 0{,}0001$$

para todo $n > 10000$, por lo que concluyo escribiendo

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$$

ii) <u>La sucesión</u>

$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2^2},\ \frac{1}{2^3},\ \ldots,\ \frac{1}{2^n},\ \ldots$$

tiene también por límite cero, ya que la diferencia

$$\left|\frac{1}{2^n} - 0\right| = \frac{1}{2^n}$$

puede hacerse tan pequeña como se quiera. Asignando a ε el valor arbitrario $\varepsilon = 0.001$ se tendrá:

$$\frac{1}{2^n} < 0.001$$

para todo n a partir del término en que

$$2^n > 1000$$

o sea a partir de $n = 10$ en adelante. Por tanto en virtud de la definición de límite se escribirá:

$$\lim \frac{1}{2^n} = 0$$

iii) La sucesión

$$\frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \ldots, \frac{n+1}{n}, \ldots$$

tiene por limite 1 ya que

$$\left| \frac{n+1}{n} - \frac{n}{n} \right| = \frac{1}{n}$$, hemos visto

(1) puede hacerse tan pequeño como se quiera. Asi se escribirá:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n-1}{n} = 1$$

iv) La sucesión

$$-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{-1}{6}, \frac{1}{8}, \ldots, \frac{(-1)^n}{2n}, \ldots$$

tiene evidentemente el límite 0 pero presenta la particularidad de tener sus términos alternadamente positivos y negativos (las sucesivas diferencias $a_n - a$, tendrán por tanto signos alternados, por lo que en este caso resulta esencial trabajar con valores absolutos, necesidad que hasta este ejemplo no había aparecido manifiestamente).

Límite infinito.

Si en una sucesión ocurre que el valor de cada uno de sus términos, a partir de un n en adelante, se mantiene superior en valor absoluto a un número arbitrario positivo A, es decir, si se observa

$$|a_v| > A \ , \ |A_{v+1}| > A \ ; \ \ldots \ ; \ |A_{v+p}| > A, \ \ldots$$

se dirá que la sucesión tiende a infinito, o tiene por límite infinito, lo que se nota según

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$$

Se distinguirán además los dos casos $+\infty$ y $-\infty$ observando en cada caso si a partir de un cierto n en adelante todos los términos de la sucesión sean positivos o negativos. Se tendrá así respectivamente:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty \quad y \quad \lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$$

i) La sucesión

$$1 \ , 2 \ , 4 \ , 9 \ , \ldots \ , n^2, \ \ldots$$

tiene por límite $+\infty$ ya que siendo todos sus términos positivos, se observa que el término general n^2 supera, a partir de un cierto n en adelante, a cualquier valor fijo por grande que sea. En consecuencia se escribirá:

$$\lim_{n\to\infty} n^2 = +\infty$$

ii) La sucesión

$$-1, \ 2 \ , -3 \ , 4 \ , \ldots \ , (-1)^n \ . \ n, \ \ldots$$

tiene por límite ∞ ya que siendo de signos alternados se observa que el valor absoluto del término general supera, a condición de considerar un término suficientemente avanzado, a cualquier número fijo por grande que sea. En consecuencia se escribirá:

$$\lim_{n\to\infty} (-1)^n . n = \infty$$

88.- SUCESIONES CONVERGENTES, DIVERGENTES Y OSCILANTES.

Llamaremos convergente a toda sucesión que tienda a un límite finito; divergente a la que presente límite infinito; e indeterminada u oscilante a aquellas que carecen de límite.

Un ejemplo de sucesión indeterminada u oscilante lo da la siguiente sucesión:

$\left\{(-1)^n + \frac{1}{n}\right\}$, ya que tiene dos puntos de acumulación alrededor de $+1$ y -1, pero ningún punto límite en el sentido de la definición.

CALCULO DE LIMITES.

89.- Límite de una suma o diferencia

Si $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ son dos sucesiones que tienden a los límites finitos a y b respectivamente, la suce- $\{a_n + b_n\}$, que tiene por términos la suma de los respectivos de $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$, tendrá por límite $a + b$.

En efecto, por ser

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \qquad y, \qquad \lim_{n\to\infty} b_n = b$$

se tendrá a partir de un cierto n en adelante:

$$-\frac{\varepsilon}{2} < a_n - a < \frac{\varepsilon}{2} \quad ; \quad y \quad -\frac{\varepsilon}{2} < b_n - b < \frac{\varepsilon}{2}$$

sumando m.a.m. $\quad -\varepsilon < (a_n + b_n) - (a + b) < \varepsilon$

es decir, por definición de límite:

$$\lim_{n\to\infty} a_n + b_n = a + b$$

Si en lugar de sumar hubiéramos restado miembro a miembro las anteriores se tendría:

$$-\varepsilon < (a_n - b_n) - (a - b) < \varepsilon$$

que en virtud de la definición de límite corresponde a expresar:

$$\lim_{n\to\infty} (a_n - b_n) = a - b$$

Ejemplo:

Sea la sucesión $\left\{\frac{1}{n}\right\}$,que tiene por límite el valor 0 ; y la sucesión $\frac{n+1}{n}$ que tiene por límite el valor 1. Una aplicación del teorema anterior justifica sea:

$$\lim_{n\to\infty} \left[\frac{n+1}{n} + \frac{1}{n}\right] = 1 + 0 = 1$$

Una aplicación reiterada de las consecuencias de esta propiedad nos conduce a la siguiente: La suma algebraica de varios sumandos que tienen límites finitos, tendrá como límite la suma algebraica de los correspondientes límites.

OBSERVACION: Esta propiedad limita el número de sucesiones que se pueden considerar, al caso determinado y finito. Si el número de sucesiones que se agregan es infinito, nada podrá adelantarse sobre su límite.

i) Si al estudiar el límite de una suma, una de las sucesiones tiene por límite ∞ ó $\pm\infty$ y la otra tiene límite finito, la suma tendrá por límite respectivamente ∞ ó $\pm\infty$.

ii) Si ambas sucesiones tienen límite $+\infty$ ó $-\infty$ la suma tendrá el mismo límite (nada puede agregarse a esta propiedad en el caso de signos contrarios o indeterminados).

90.- LIMITE DE UN PRODUCTO.

i) Si $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ son dos sucesiones tales que la primera tiende al límite cero, y la segunda tiende a un límite finito b, la sucesión producto $\{a_n \cdot b_n\}$ tendrá por límite cero. En efecto, por hipótesis

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \quad ; \quad \lim_{n\to\infty} b_n = b$$

luego, a partir de un n en adelante se observará

$$|a_n| < \frac{\varepsilon}{K} \quad ; \quad |b_n| < K$$

en consecuencia:

$$|a_n \cdot b_n| = |a_n| \cdot |b_n| < \frac{\varepsilon}{K} \cdot K = \varepsilon$$

de donde

$$\lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = 0$$

ii) Si a_n tiene por límite oo, y además b_n se conserva siempre superior a un número $k > 0$, es decir si:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty \quad , \quad \lim_{n\to\infty} b_n = b$$

se tendrá a partir de un n en adelante:

$$a_n > \frac{A}{k} \qquad\qquad b_n > k$$

en consecuencia:

$$|a_n \; b_n| = |a_n| \cdot | b_n| > \frac{A}{k} \cdot k = A$$

de donde, por la definición de límite

$$\lim_{n\to\infty} \{a_n \cdot b_n\} = \infty$$

iii) Si $\{a_n\}$ admite el límite finito a, y $\{b_n\}$ admite el límite finito b, se tendrá que el producto $\{a_n \cdot b_n\}$ tiene por límite $a.b$.

Para demostrar ésto bastará demostrar que la diferencia $|a\,b - a_n \; b_n|$ se mantiene, a partir de un cierto n en adelante, tan pequeña como se quiera. Como esta diferencia puede escribirse:

$$ab - a_n\,b_n = a\,(b - b_n) + b_n\,(a - a_n)$$

se tiene por la propiedad (i)

$$\lim_{n\to\infty} a\,(b - b_n) = 0 \quad ; \quad \lim_{n\to\infty} b_n\,(a - a_n) = 0$$

en consecuencia se verificará:

$$-\frac{\varepsilon}{2} < a\,(b-b_n) < \frac{\varepsilon}{2} \quad ; \quad -\frac{\varepsilon}{2} < b_n\,(a - a_n) < \frac{\varepsilon}{2}$$

sumando m.a.m. estas dos desigualdades resulta

$$-\varepsilon < a\,.\,(b - b_n) + b_n\,(a - a_n) < \varepsilon$$

$$-\varepsilon < a\,b - a_n\,b_n < \varepsilon$$

que, por la definición de límite, nos dice:

$$\lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = a.b$$

91.- LIMITE DE UN COCIENTE.

Si a_n tiende al límite finito a, y b_n tiende al límite finito b, este último distinto de cero, el cociente $\frac{a_n}{b_n}$ tendera al límite $\frac{a}{b}$.

Para demostrar esta propiedad demostraremos primeramente que si:

$$\lim_{n\to\infty} b_n = b \text{ , será } \lim_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} = \frac{1}{b}$$

En efecto: la diferencia

$$\frac{1}{b} - \frac{1}{b_n} = \frac{b_n - b}{b.\ b_n} = (b_n - b).\ \frac{1}{b.\ b_n}$$

puede hacerse tan pequeña como se quiera, ya que si b es finito, a partir de un n en adelante la diferencia $(b_n - b)$ tenderá a cero, y el cociente $\frac{1}{b.\ b_n}$ no superará a un número arbitrario fijo.

Demostrado ésto se tiene:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} a_n . \frac{1}{b_n} = \lim_{n\to\infty} a_n . \lim_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} =$$

$$a . \frac{1}{b}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b} \qquad \text{c.q.d.}$$

ii) Si en un cociente el denominador tiende a infinito y el numerador es finito, el cociente tendrá por límite cero. En efecto, al ser:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \quad ; \quad \lim_{n\to\infty} b_n = \infty$$

será, a partir de un cierto n en adelante

$$|a_n| < K \qquad |b_n| < \frac{K}{\varepsilon}$$

resultando en consecuencia :

$$\left|\frac{a_n}{b_n}\right| = \frac{|a_n|}{|b_n|} < \frac{K}{K/\varepsilon} = \varepsilon$$

de donde, por definición de límite, resulta:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n} = 0 \qquad \text{c.q.d.}$$

iii) Si en un cociente el denominador se conserva finito, y el numerador tiene por límite infinito, el cociente tendrá límite infinito. En efecto, al ser

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \infty \quad \text{y} \quad \lim_{n \to \infty} b_n = b$$

se tendrá, por definición de límite, y a partir de un cierto n en adelante que:

$$|a_n| > A.K \qquad |b_n| < K$$

se tendrá entonces:

$$\left|\frac{a_n}{b_n}\right| = \frac{|a_n|}{|b_n|} < \frac{A.K}{k} = A$$

de donde, por definición de límite:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty \qquad \text{c.q.d.}$$

iv) Si en un cociente el numerador tiende a un límite finito a, y el denominador tiende al límite cero, el cociente tendrá límite infinito.

Por ser:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \quad , \text{ y } \lim_{n\to\infty} b_n = 0$$

a partir de un n en adelante se verificará

$$|a_n| > k \quad ; \quad |b_n| < \frac{A}{k}$$

luego $$\left|\frac{a_n}{b_n}\right| = \frac{|a_n|}{|b_n|} > \frac{k}{k/A} = A$$

que, por definición de límite corresponde a:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty \qquad \text{c.q.d.}$$

92.- <u>Límite de un logaritmo</u>.

Si b_n es una variable que tiende al límite finito b, o sea si: $\lim_{n\to\infty} b_n = b$, se tendrá:

$$\lim_{n\to\infty} (\log_a b_n) = \log_a b.$$

o sea: el límite del logaritmo de una variable es igual al logaritmo del límite de la misma. Para esto se deberá observar, a partir de un cierto n en adelante:

$$-\varepsilon > \log_a b_n - \log_a b < \varepsilon$$

Tomando la base de nuestro sistema de logaritmos, $a > 1$, se tendrá para ε arbitrario positivo;

$$a^{\varepsilon} > 1 , \quad a^{-\varepsilon} < 1$$

y como
$$\lim_{n \to \infty} \frac{b_n}{b} = 1 \text{ , será}$$

$$a^{-\varepsilon} < \frac{b_n}{b} < a^{\varepsilon}$$

Tomando logaritmos en base a se tiene:

$$\log_a a^{-\varepsilon} < \log_a b_n - \log_a b < \log_a a^{\varepsilon}$$

o sea:

$$-\varepsilon < \log_a b_n - \log_a b < \varepsilon$$

de donde, por la definición de límite, resulta:

$$\lim_{n \to \infty} \log_a b_n = \log_a \lim_{n \to \infty} b_n = \log_a b$$

c.q.d.

93.- LIMITE DE UNA POTENCIA

1) Si a es un número positivo, y b_n tiende al límite finito b, o sea:

$$a > 0 \qquad ; \qquad |b_n - b| < \varepsilon$$

se tendrá:

$$\lim_{n\to\infty} a^{b_n} = a^b$$

En efecto, si logramos demostrar que, la diferencia $a^{b_n} - a^b$ se mantiene, en valor absoluto y a partir de un cierto n en adelante, tan pequeña como se quiera, habremos demostrado nuestro teorema.

Estudiaremos esta diferencia

$$a^{b_n} - a^b = a^b \cdot (a^{b_n - b} - 1)$$

$$a^{b_n} - a^b = a^b \left| a^{b_n - b} - 1 \right|$$

En el segundo miembro, por ser $\lim_{n\to\infty} b_n = b$, a condición de considerar un n suficientemente avanzado, la diferencia $b_n - b$ se hace tan próxima a cero como se quiera, resultando por tanto el valor absoluto de la diferencia

$$\left| a^{b_n - b} - 1 \right| < \varepsilon$$

de donde resulta

$$\lim_{n\to\infty} (a^{b_n} - a^b) = 0$$

y en consecuencia

$$\lim_{n\to\infty} a^{b_n} = a^b \qquad \text{c.q.d.}$$

ii) Si se tiene $\lim_{n\to\infty} a_n = a > 0$; y además ocurre

$$\lim_{n\to\infty} b_n = b \text{ , será:}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n^{b_n} = a^b$$

Si $\alpha > 1$, es la base de un sistema de logaritmos se tendrá:

$$\log_\alpha a_n^{b_n} = b_n \cdot \log_\alpha a_n$$

de donde

$$a_n^{b_n} = \alpha^{b_n \cdot \log_\alpha a_m}$$

Se tendrá así por propiedades anteriores:

$$\lim_{n \to a} a_n^{b_n} = \alpha^{\lim (b_n \log_\alpha a_n)} = \alpha^{b \cdot \log_\alpha a}$$

$$= (\alpha^{\log_\alpha a})^b$$

$$\lim_{n \to \infty} a_n^{b_n} = a^b \qquad \text{c.q.d.}$$

94.- <u>LIMITES INDETERMINADOS</u>

Corresponderán a aquellos casos que escapan a las reglas provistas por los teoremas que se acaban de demostrar. En estos casos el conocimiento de los límites de los elementos de una expresión aritmética no determinará el límite de la misma.

Estos casos de que hacemos mención, pueden sintetizarse en los siguientes expresiones indeterminadas.

1) si $a_m \to o$ y $b_m \to \infty$

la expresión $a_m \cdot b_m$ será, en el límite, de la forma indeterminada $o \cdot \infty$.

ii) Si $a_n \to o$, y $b_n \to o$

la expresión $\frac{a_n}{b_n}$ será, en el límite, de la forma in determinada $\frac{o}{o}$.

iii) Si $a_n \to oo$, y $b_n \to \infty$,

la expresión $\frac{a_n}{b_n}$ será, en el límite, de la forma indeterminada $\frac{oo}{oo}$.

iv) Si $a_n \to \infty$, y $b_n \to oo$ la expresión $a_n - b_n$ será, en el límite, de la forma indeterminada $oo - oo$.

v) Si $a_n \to o$, y $b_n \to o$

la expresión $a_n^{b_n}$ será, en el límite, de la forma indeterminada 1^{oo}.

95.- LIMITES DE EXPRESIONES RACIONALES

Las formas indeterminadas del tipo $\frac{oo}{oo}$ son susceptibles de admitir un límite cuando se trate de expresiones racionales, es decir del tipo:

$$\frac{a_o \ n^k + a_1 \ n^{k-1} + \dots + a_k}{b_o \ n^h + b_1 \ n^{h-1} + \dots + b_h}$$

Cuando n crece indefinidamente, tanto el numerador como el denominador tienden a oo. Tal indeterminación podrá quebrarse si se divide numerador y denominador de la expresión, por la mayor de aquellas dos potencias de n que determinan el grado de los respectivos polinomios en numerador y denominador.

Consideremos como ejemplo numérico el problema de calcular

$$\lim_{n \to \infty} \frac{2n^3 + 3n^2 + 5}{2n^2 + 6n + 3}$$

Dividiendo numerador y denominador por n^3 se tendrá:

$$\frac{2n^3 + 3n^2 + 5}{2n^2 + 6n + 3} = \frac{2 + \frac{3}{n} + \frac{5}{n^3}}{\frac{2}{n} + \frac{6}{n^2} + \frac{3}{n^3}}$$

si en este momento hacemos tender n a infinito, el numerador tendrá por límite 2 , mientras que el denominador tendrá por límite cero. En consecuencia el límite de nuestra expresión será infinito.

Consideremos, al través de otro ejemplo numérico, el caso en que los respectivos polinomios del numerador y denominador sean del mismo grado. Sea nuestro problema el de calcular

$$\lim_{n \to \infty} \frac{4n^5 + 6n^3 - 2}{12n^5 + 3n^4 - 2n^3 + 4n - 5}$$

Dividiendo numerador y denominador por n^5, se llegará a:

$$\frac{4 + \frac{6}{n^2} - \frac{2}{n^5}}{12 + \frac{3}{n} - \frac{2}{n^2} + \frac{4}{n^4} - \frac{5}{n^5}}$$

Al crecer n indefinidamente, numerador y denominador tenderán respectivamente a los límites finitos 4 y 12 por tanto nuestra expresión racional tendrá por límite

$$\frac{4}{12} = \frac{1}{3} .$$

Operando de esta manera podremos resolver indeterminaciones en expresiones racionales cualesquiera. Bastará tan solo llevar las mismas a la forma típica que se acaba de estudiar.

96.- SUCESIONES MONOTONAS CONVERGENTES

Si se tienen dos sucesiones $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ tales que: i) $\{a_n\}$ sea una sucesión creciente, es decir:

$$a_n < a_{n+1}$$

ii) $\{b_n\}$ sea una sucesión decreciente, es decir

$$b_n > b_{n+1}$$

iii) Cada elemento de a_n sea inferior a todo elemento de b_n, es decir:

$$a_i < b_j$$

iv) La diferencia $b_n - a_n$, entre dos términos correspondientes se mantenga menor que ε, para todo n a partir de un cierto $n = v$ en adelante, es decir si:

$$\left| b_n - a_n \right| < \varepsilon$$

Se dirá que ambas sucesiones convergen hacia un límite común que es el elemento de separación de las dos clases.

97.- NUMERO e

Vista la anterior propiedad, estudiemos las sucesiones que tienen por términos generales:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} \quad \text{y} \quad \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

Se observa que son dos sucesiones monótonas convergentes ya que:

i) La primera sucesión es creciente. En efecto, la razón de un término al anterior:

$$\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}}{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}} = \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}}{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n}\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{-1}} = \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n}\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n}}{\frac{n-1}{n}}$$

$$\frac{\left[\frac{(n+1)\ (n-1)}{n^2}\right]^{n}}{1-\frac{1}{n}} = \frac{\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{n}}{1-\frac{1}{n}} \overset{(x)}{>} \frac{1-\frac{n}{n^2}}{1-\frac{1}{n}} = 1$$

nos da un número mayor que la unidad, de donde cada término de la sucesión es mayor que el anterior.

(x) en el desarrollo de $\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{n} = 1-\frac{n}{n^2}+\frac{n(n-1)}{2!\ n^4} - \frac{n(n-1)(n-2)}{3!\ n^8} + \ldots$ se observa que el término general decrece indefinidamente. Por ser los términos del segundo miembro, de signos alternados, es inmediato que si cortamos la suma en un término determinado, se comete un error menor que el valor del término siguiente. Por tanto se tendrá

$$\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{n} > 1-\frac{n}{n^2} .$$

ii) La segunda sucesión es decreciente. En efecto la razón de un término al siguiente:

$$\frac{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}} = \frac{\left(\frac{n}{n-1}\right)^n}{\left(\frac{n+1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)} = \frac{\left(\frac{n}{n-1}\right)^n \left(\frac{n}{n+1}\right)^n}{1+\frac{1}{n}} =$$

$$\frac{\left[\frac{n}{n-1}\cdot\frac{n}{n+1}\right]^n}{1+\frac{1}{n}} = \frac{\left[1+\frac{1}{n^2-1}\right]^n}{1+\frac{1}{n}} \overset{(xx)}{>} \frac{1+\frac{n}{n^2-1}}{1+\frac{1}{n}} > 1$$

nos da un número mayor que la unidad, de donde resulta que cada término es mayor que el siguiente.

iii) Por tratarse de potencias de base mayor que la unidad habrá de verificarse, para todo n:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n-1}$$

iv) La diferencia entre dos términos de un mismo orden de ambas sucesiones se hace tan pequeña como se quiera. En efecto, la diferencia:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left(1+\frac{1}{n}-1\right)$$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot \frac{1}{n} < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} \cdot \frac{1}{n}$$

(xx) Si en el desarrollo de $\left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^n = 1+\frac{n}{n^2-1}+$

$+\frac{n(n-1)}{2:(n^2-1)^2}+ \quad \ldots$ consideramos tan solo los dos primeros términos, tendremos un valor aproximado por defecto, de donde

$$\left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^n > 1+\frac{n}{n^2-1}$$

y este producto, en que $(1+\frac{1}{n})^{n+1}$ se mantiene inferior a 4 y $\frac{1}{n} \to 0$, tenderá a cero con $n \to \infty$ de donde, a partir de un n en adelante

$$\left|(1+\frac{1}{n})^{n+1} - (1+\frac{1}{n})^{n}\right| < \varepsilon \qquad \text{c.q.d.}$$

Nuestras dos sucesiones, queda así demostrado, convergen hacia un límite común: el número e, definido según

$$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} = e$$

Potencias del número e

Demostraremos que:

$$\lim_{n\ \infty} \left(1+\frac{x}{n}\right)^{n} = e^{n}$$

En efecto, en $(1+\frac{x}{n})^{n}$, podemos efectuar la sustitución $\frac{x}{n} = \frac{1}{m}$; así se observará

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n} = \left(1+\frac{1}{m}\right)^{m.x} = \left[\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m}\right]^{x}$$

Como en el límite, cuando $n \to \infty$, también $m \to \infty$ será:

$$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{x}{n}\right)^{n} = \lim_{m\to\infty} \left[\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m}\right]^{x} = \left[\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{m}\right]^{x} = e^{x}$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x \qquad \text{c.q.d.}$$

y de la misma forma

$$\lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{x}{n}\right)^n = e^{-x}$$

98.- CALCULO DEL NUMERO e

Ya hemos visto que el límite anterior existe y es finito; procedamos ahora a calcularlo. Para esto observemos la expresión

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = 1+\frac{n}{1!}\,\frac{x}{n}+\frac{n(n-1)}{2!}\,\frac{x^2}{n^2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\,\frac{x^3}{n^3}+\dots$$

$$+\frac{n(n-1)\dots 2.1}{n!}\,\frac{x^n}{n^n} = 1+\frac{x}{1!}+\left(1-\frac{1}{n}\right)\frac{x^2}{2!}+\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\frac{x^3}{3!}+$$

$$+\dots \left(1-\frac{1}{n}\right)\dots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)\frac{x^n}{n!}$$

al crecer n indefinidamente, el segundo miembro resultará suma de infinitos términos, en donde los factores $\left(1-\frac{1}{n}\right)$, $\left(1-\frac{2}{n}\right)$ etc. tienden a la unidad. Así se tendrá:

$$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{x}{n}\right)^n = 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\dots+\frac{x^n}{n!}+\dots$$

dando en la anterior, a x el valor 1 se tiene:

$$e = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2\,!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots$$

fórmula que nos permite calcular el valor aproximado del número e con tantos términos como se quiera.

$$1 = 1$$

$$\frac{1}{1!} = 1$$

$$\frac{1}{2!} = 0.5$$

$$\frac{1}{3!} = 0.1666\ldots$$

$$\frac{1}{4!} = 0.041666\ \ldots$$

$$\frac{1}{5!} = 0.000333\ \ldots$$

$$\frac{1}{6!} = 0.0013888\ \ldots$$

. . . .

$$e = 2.71828\ 18284$$

99.- <u>SERIES</u>.

Dada una sucesión indefinida:

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,\ a_n,\ \ldots$$

se llamará serie a la suma de los infinitos términos de la misma:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$$

Para estudiar esta suma de infinitos sumandos, formamos la sucesión de las sumas parciales:

$$s_1 = a_1$$

$$s_2 = a_1 + a_2$$

$$s_3 = a_1 + a_2 + a_3$$

$$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

que constituye una sucesión indefinida, pudiendo n asumir cualquier valor. Si esta sucesión es convergente, es decir si:

$$\lim_{n\to\infty} s_n = S$$

se dirá que la serie es convergente, denotando con S la suma de la misma.

Si fuera $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \infty$, la serie se dirá divergente, superando su suma a cualquier valor fijo.

Si la sucesión s_n no admite un límite, se dirá que la serie es indeterminada u oscilante.

Consideremos, la suma de los términos de una progresión geométrica indefinida:

$$1 + q + q^2 + q^3 + \cdots + q^n + \cdots$$

Al estudiar las progresiones geométricas vimos que:

$$s_n = \frac{1 - q^n}{1 - q} = \frac{1}{1 - q} - \frac{q^n}{1 - q}$$

Siendo s_n el término general de la sucesión de las sumas parciales, al estudiar el límite de las mismas, se observan tres casos:

i) $|q| < 1$

Se tendrá: $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$, resultando

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \frac{1}{1 - q} = S$$

que corresponde al caso de una serie convergente.

ii) $|q| > 1$

Se tendrá: $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = \infty$, resultando

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \left[\frac{1}{1 - q} - \frac{q^n}{1 - q} \right] = \infty$$

superando por tanto el término general, a cualquier número fijo, como corresponde al caso de una serie divergente.

iii) $|q| = 1$

Si la razón es igual a la unidad, $q = 1$, la serie $1 - 1 + 1 - \dots + 1 - \dots$ será divergente.

Si la razón es igual a -1, la serie $1 - 1 + 1 - 1 + \dots$ será oscilante, ya que la sucesión de las sumas parciales presenta alternadamente los valores 1 y 0, careciendo por tanto de límite finito.

100.- CONDICION NECESARIA DE CONVERGENCIA.

Hemos visto que, para que una serie se diga convergente se debía cumplir:

$$\lim_{n\to\infty} s_n = S$$

lo que entraña

$$\lim_{n\to\infty} s_{n-1} = S$$

Se tendrá así $\lim_{n\to\infty} (s_n - s_{n-1}) = 0$

y como

$$s_n - s_{n-1} = a_n$$

deberá ser

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

ésta, condición necesaria para la convergencia de una serie, no es suficiente. Probaremos esto último a través de un ejemplo:

Consideremos la serie armónica:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$$

En la misma, el término general $\frac{1}{n}$, tiende a cero, ya que $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Ordenando convenientemente los términos de la misma resulta:

$$1 = 1$$

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} > \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} > \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \cdots + \frac{1}{15} + \frac{1}{16} > \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{16} = \frac{1}{2}$$

$$s_n > 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \ldots$$

se observa así que, a condición de tomar un número suficiente de términos, el desarrollo anterior supera a cualquier número fijo, por lo tanto $\lim_{n\to\infty} s_n = \infty$, siendo, en consecuencia, la serie armónica, divergente.

101.- CRITERIOS DE CONVERGENCIA.

Para determinar si una serie dada es convergente, es decir si $\lim_{n\to\infty} S_n = S$, a fin de poder afrontar posteriormente el cálculo del valor numérico de la suma de los infinitos términos de la misma, se deberá recurrir a algún criterio general de convergencia, de los que se indican los más conocidos:

1) Criterio de Cauchy. Si desde un valor de n en adelante se conserva $\sqrt[n]{a_n}$, menor que un número positivo $k < 1$, la serie en cuestión será convergente. Si por el contrario resultara $\sqrt[n]{a_n} > 1$, la serie será divergente.

Si ocurre que $\sqrt[n]{a_n} < k < 1$, será $a_n < k^n$, siendo los términos de la serie en cuestión, respectivamente menores que los correspondientes de la serie geométrica

$$1 + k + k^2 + \dots + k^n + \dots$$

que sabemos es convergente, por ser $k < 1$; en consecuencia será también convergente la serie dada. c.q.d.

ii) Criterio de D'Alembert.

Si desde un valor de n en adelante se conserva la razón de un término al anterior: $\dfrac{a_n}{a_{n-1}}$ menor que un número positivo $k < 1$, la serie será convergente. Si por el contrario resultara $\dfrac{a_n}{a_{n-1}} > 1$, la serie será divergente.

Siempre se puede suponer que el término n-ésimo en cuestión es el primero, ya que los términos precedentes tienen una suma finita. lo que no altera el carácter de la serie.

Asi, si se observa desde $n = 2$ en adelante

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} < k \quad ,$$

será:

$$a_2 < a_1 \ k = a_1 \ k$$

$$a_3 < a_2 \ k < a_1 \ k^2$$

$$a_4 < a_3 \ .k < a_1 \ k^3$$

sumando m.a.m. y agregando a ambos miembros el término a_1 se tendrá:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots < a_1 (1 + k + k^2 + \dots)$$

Como la serie del término mayorante es convergente; para $k < 1$ tiene por límite $\frac{1}{1 - k}$, será:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots < a_1 \cdot \frac{1}{1-k}$$

en consecuencia, por mantenerse la suma de los n primeros términos de la serie en cuestión, menor que un número fijo $a_1 \cdot \frac{1}{1 - k}$ queda demostrado que la misma es convergente.

102.- <u>NOCIONES DE CALCULO INFINITESIMAL</u>.

103.- <u>Ecuación de la recta que pasa por dos puntos</u>.-

Hemos visto la ecuación general de la recta

$$y = m\ x + h \qquad (1)$$

Para que la (1) cumpla con la condición de pasar por el punto P_1 de coordenadas x_1, y_1, evidentemente se deberá cumplir la condición de pertenencia:

$$y_1 = m\ x_1 + h \qquad (2)$$

formando una ecuación consecuencia de (1) y (2) se tendrá

$$y - y_1 = m (x - x_1) \qquad (3)$$

que recibe el nombre de ecuación del haz de rectas que pasan por el punto de coordenadas x_1, y_1, y muestra las relaciones que hay entre las coordenadas de los puntos del plano pertenecientes a una de las infinitas rectas que pasan por el punto P. El parámetro m de la (3) mide, en este caso, lo mismo que en la ecuación general de la recta, el coeficiente angular o pendiente de la recta. En este caso, m puede asumir valores arbitrarios, lo que corresponde a elegir una cualquiera, de entre las infinitas rectas que cumplen con la condición de pasar por P .

Si para determinar una de las infinitas rectas que pasan por P , imponemos a (3) la condición de satisfacer las coordenadas de un segundo punto P_2 ; lo que geometricamente equivale a elegir de entre las infinitas rectas que pasan por P_1 , aquella que pase también por P_2 ; se deberá cumplir:

$$y_2 - y_1 = m\,(x_2 - x_1) \qquad (4)$$

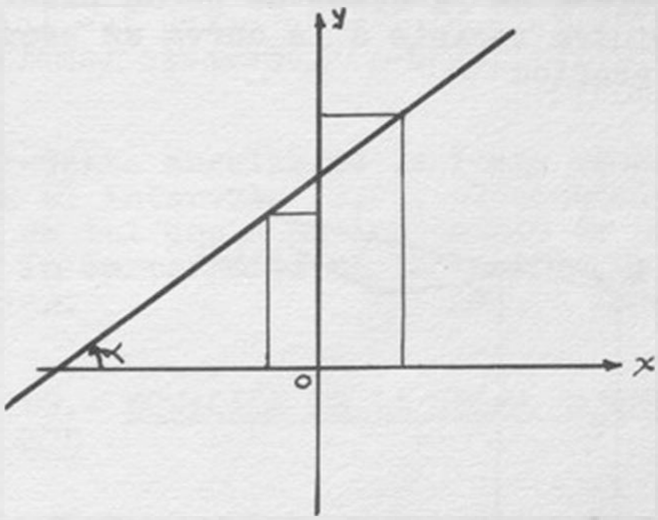
Formando entre la (3) y la (4) una ecuación consecuencia, dividiendo m.a.m. se tendrá:

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \qquad (5)$$

que es la ecuación de la recta que pasa por los puntos P_1 y P_2 , de coordenadas respectivamente iguales a: $(x_1, y_1), (x_2 , y_2)$. Como en la (5) aparece la ecuación de la recta, escrita en su forma implícita, no se observan inmediatamente los valores de los parámetros: coeficiente angular y ordenada al origen. A fin de poder destacar los correspondientes valores de estos dos parámetros de la ecuación de la recta se podrá expresar la (5) en la forma que nos es familiar para la ecuación de la recta:

$$= \underbrace{\left[\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right]}_{\substack{m \\ \text{coeficiente} \\ \text{angular}}} x \;-\; \underbrace{\left[(y_2 - y_1)\, x_1 - y_1\right]}_{\substack{h \\ \text{ordenada} \\ \text{al origen}}} \qquad (6)$$

<u>EJEMPLO</u>: Determinar la ecuación de la recta que pasa por los puntos $P_1\ (2, 5)$, $P_2\ (-1, 3)$



sustituyendo las coordenadas de los puntos dados en la (5), se tiene:

$$\frac{y - 5}{3 - 5} = \frac{x - 2}{-1 - 2}$$

De donde resulta

$$y = \frac{2}{3}\ x + \frac{11}{3}$$

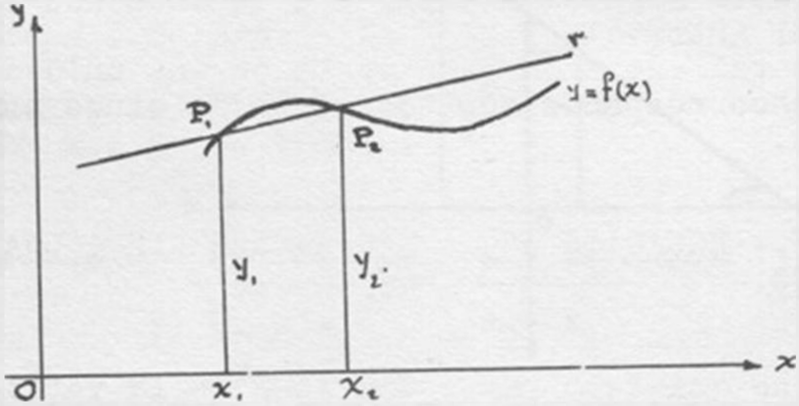
que es la ecuación de la recta pedida, y en donde se observan los valores correspondientes a los parámetros: ordenada al origen $\frac{11}{3}$, y coeficiente angular $\frac{2}{3}$.

Como el coeficiente angular de la ecuación de la recta mide la tangente trigonométrica del ángulo que forma dicha recta con el sentido positivo del eje de las x , llamando con α a dicho ángulo se tendrá:

$$\alpha = \text{arc. tag. } \frac{2}{3} = 33^{\circ}\ 40'$$

104.- ECUACION DE LA RECTA SECANTE A UNA CURVA.

Consideremos la curva de ecuación $y = f(x)$. Por dos puntos cualesquiera de la misma se puede pasar una recta que se denominará secante a la curva en esos dos puntos. Así en la gráfica



r seca a la curva de ecuación $y = f(x)$ en $P_1(x_1,y_1)$ y $P_2(x_2,y_2)$. La ecuación de r quedará determinada cuando se conozcan las abscisas de P_1 y P_2 , ya que las respectivas ordenadas quedarán determinadas por los correspondientes valores que arroje en esos puntos la función $y = f(x)$.

El coeficiente angular de la recta secante a una curva en dos puntos dados de la misma mide la pendiente o crecimiento medio de la función en el intervalo que sustenta los dos puntos considerados.

EJEMPLO. Consideremos la curva de ecuación $y = x^2$, y afrontemos el problema de determinar la ecuación de la recta que seca a la curva en dos puntos de abscisa 2 y 3 por ejemplo. Las ordenadas correspondientes serán en consecuencia 4 y 9 respectivamente. Así planteado el problema, la (5) nos provee la ecuación de la recta secante:

$$\frac{y - 4}{9 - 4} = \frac{x - 2}{3 - 2}$$

que llevada a la forma normal de la ecuación de la recta resulta:

$$y = 5x - 6$$

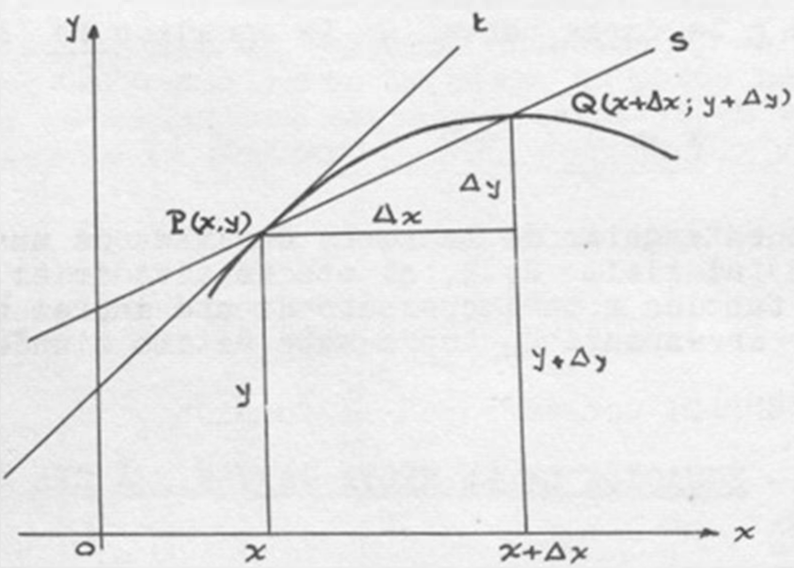
El coeficiente angular de la recta secante nos muestra que para el intervalo 2, 3, el crecimiento medio de la función es tal que a un incremento de una unidad en la variable, le corresponde un incremento de cinco unidades a la función.

105.- ECUACIÓN DE LA RECTA TANGENTE A UNA CURVA EN UN PUNTO.-

Si se quisiese tener una idea de la variación de la función en un intervalo más pequeño, tendríamos que reducir la amplitud del intervalo x_1, x_2 que sustentan los puntos P_1 y P_2. Así, siguiendo este camino, para tener una medida de la variación instantánea de la función $y = f(x)$ en un punto dado de la misma, deberemos considerar la posición límite del caso anterior cuando el segundo punto que se toma sobre la curva, tiende indefinidamente al primero. En este caso la recta secante tiende a su posición límite que es la de tangente a la curva en el punto P_1.

Afrontemos el cálculo analítico de la ecuación de la recta tangente a una curva de ecuación $y = f(x)$, en un punto P de abscisa x . Sea el punto P(x,y), en donde con y designamos la ordenada sobre la curva correspondiente a un punto de abscisa x , y sea un punto próximo Q(x+ Δ x , y+ Δ y), en donde con Δx designamos un incremento arbitrario de la variable x , y con

Δ y el correspondiente incremento de la función, de acuerdo a la siguiente gráfica.



Se observa en este caso que, para que el punto Q tienda al punto P , deberá tender el punto x+ Δ x al punto x , para lo cual basta que x tienda a cero. La ecuación de la recta tangente a la curva por el punto P será entonces la de la secante que pasa por P y por Q considerada en su posición límite cuando Q tiende indefinidamente hacia P . El coeficiente angular de la recta tangente estará dado, en consecuencia

por el $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$. Como el incremento de la función resulta de la diferencia entre el valor que corresponde a la misma en el punto x+ Δ x y el correspondiente valor en el punto x , el coeficiente angular de la recta tangente a la curva en el punto de abscisa x , estará dado por el límite de la expresión:

$$\lim_{x \to o} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Cuando con x no denotamos un valor particular de la variable, sino un valor genérico de la misma, el límite anterior, si existe, y cuya significación geométrica acabamos de observar, recibe el nombre de DERIVADA DE LA FUNCION $y = f(x)$, y lo denotaremos según cualquiera de las siguientes formas:

$$y' = f'(x) = D\,f(x) = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to o} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

106.- <u>CONCEPTO DE DERIVADA</u>

Se entenderá entonces por derivada de una función $y = f(x)$ al límite del cociente de dividir el incremento de la función por el correspondiente incremento arbitrario de la variable, cuando este último tiende a cero.

EJEMPLO: Consideremos la función

$$y = x^2$$

La relación incremental

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

será en nuestro caso:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x+\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x}$$

Desarrollando el cuadrado y procediendo a efectuar las correspondientes simplificaciones se tendrá:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2\,x\,\Delta\,x\;+\Delta x^2}{\Delta x}$$

Al calcular el límite de esta última expresión, se está frente a un caso de indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$ que sabemos resolver, resultando:

$$D\,x^2 = \lim_{x \to o} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 2\,x$$

Esta nueva función, $y' = 2\,x$, derivada de la $y = x^2$, me dará, para cualquier valor de x, es decir para cualquier punto de la curva representativa de la función $y = x^2$, la medida de la tangente trigonométrica de la tangente geométrica a la curva en ese punto.

CALCULO DE DERIVADAS

107.- DERIVADA DE UNA SUMA DE FUNCIONES DE UNA MISMA VARIABLE.

Sea por ejemplo nuestra función

$$f(x) = \varphi(x) + \psi(x)$$

por definición de derivada será

$$f'(x) = \lim_{x \to o} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x \to o} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

y como

$$\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{\varphi(x+\Delta\,x) + \psi\,(x+\Delta\,x) - \varphi(x) - \psi(x)}{\Delta\,x}$$

$$= \frac{\varphi(x+\Delta x) - \varphi(x)}{\Delta x} + \frac{\psi(x+\Delta x) - \psi(x)}{\Delta x}$$

que en el límite para $x \to 0$ resulta:

$$f'(x) = \varphi(x) + \psi(x)$$

De donde se deriva la siguiente regla: La derivada de una suma de dos o más funciones es igual a la suma de las derivadas de las respectivas funciones.

108.- DERIVADA DE UN PRODUCTO DE DOS FUNCIONES DE UNA VARIABLE

Sea por ejemplo nuestra función

$$y = u \cdot v \quad \text{en donde} \quad \begin{array}{l} u = \varphi(x) \\ v = \psi(x) \end{array}$$

dando a la variable x un incremento Δx, las funciones u y v recibirán los correspondientes incrementos Δu y Δv. Denotando con y el incremento correspondiente de la función y, se tiene

$$y + \Delta y = (u + \Delta u) \cdot (v + \Delta v)$$

$$y + \Delta y = u \cdot v + u \cdot \Delta v + v \cdot \Delta u + \Delta u \cdot \Delta v$$

restando a ambos miembros el valor y se tendrá:

$$\Delta y = u \cdot \Delta v + v \cdot \Delta u + \Delta u \cdot \Delta v$$

y formando la relación incremental

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = u\,\frac{\Delta v}{\Delta x} + v\,\frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta u}{\Delta x}\,\Delta v$$

que, en el límite para $\Delta x \rightarrow 0$ me conduce a la siguiente

$$y' = u.v' + v.u'$$

de la que se desprende la siguiente regla práctica: La derivada de un producto de dos funciones es igual a la suma de los productos que se obtienen multiplicando la derivada de cada factor por el restante.

109.- DERIVADA DE UN COCIENTE ENTRE DOS FUNCIONES DE UNA VARIABLE.

Sea por ejemplo nuestra función

$$y = \frac{u}{v} \qquad \text{en donde:} \qquad \begin{array}{l} u = \varphi(x) \\ v = \psi(x) \end{array}$$

Al dar a la variable x el incremento Δx, la y recibirá el correspondientes incremento Δy al través de los respectivos incrementos de las variables u y v. se tiene así:

$$y + \Delta y = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v}$$

restando a ambos miembros de la anterior el valor correspondiente a la función y, para obtener así la expresión del incremento Δy, se tiene:

$$\Delta y = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v} - \frac{u}{v} = \frac{u.v + v\,\Delta u - u.v - u\,\Delta v}{v^2 + v\,\Delta v}$$

simplificando, se tiene la siguiente expresión del incremento de y

$$\Delta y = \frac{v\ \Delta u - u\ \Delta v}{v^2 + v\ \Delta v}$$

Dividiendo por el incremento de la variable, y distribuyendo éste repecto a los dos términos del numerador se tiene la siguiente relación incremental:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{v\ \frac{\Delta u}{\Delta x} - u\frac{\Delta v}{\Delta x}}{v^2 + v\ \Delta v}$$

que, en el límite cuando Δx, incremento de la variable, tienda a cero, resulta:

$$y' = \frac{u'.\ v - v'.\ u}{v^2}$$

de la que se desprende la siguiente regla práctica: La derivada de un cociente entre dos funciones de una variable es igual al denominador por la derivada del numerador, menos éste por la derivada del denominador, partido por el cuadrado del denominador.

CALCULO DE LAS DERIVADAS DE ALGUNAS FUNCIONES ELEMENTALES.

110.- DERIVADA DE LA FUNCION $y = x^n$

Incrementando la variable en Δx, la función recibe el correspondiente incremento Δy,

$$\Delta y = (x + \Delta x)^n - x^n$$

Desarrollando la potencia del binomio, se tiene:

$$y = x^n + n\,x^{n-1}\,\Delta x + \frac{n\,(n-1)}{2!}\,x^{n-2}\,\Delta x^2 + \ldots - x^n$$

Formando la relación incremental, dividiendo el incremento de la función por el incremento asignado a la variable se tiene:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{n\;x^{n-1}\;\Delta x + \frac{n(n-1)}{2!}\;x^{n-2}\;\Delta x^2 + \ldots}{\Delta x}$$

Distribuyendo este cociente respecto de cada uno de los términos del numerador de la anterior resulta:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = n\;x^{n-1}\;\frac{\Delta x}{\Delta x} + \frac{n\,(n-1)}{2!}\;x^{n-2}\;\frac{\Delta x^2}{\Delta x} + \ldots$$

La que luego de las correspondientes simplificacioness resulta:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = n\;x^{n-1} + \frac{n\,(n-1)}{2!}\;x^{n-2}\;\Delta x + \ldots$$

en donde, los términos posteriores al segundo presentan el factor Δx a potencias superiores a la unidad.

En el límite, cuando Δx tienda a cero, todos los términos del segundo miembro, excepto el primero, tenderán a cero, y la derivada estará dada por:

$$y' = \lim_{x\;o} \frac{\Delta y}{\Delta x} = n\,.\,x^{n-1}$$

<u>Caso particular en que $n = 1$</u>.

Aplicando la regla que se desprende del teorema anterior, se tendrá:

$$D\,x = 1$$

que permite expresar la siguiente regla: la derivada de la función identidad es igual a la unidad.

111.- EXPRESION DEL INCREMENTO DE LA FUNCION DE UNA VARIABLE INDEPENDIENTE.-

De la definición de derivada de una función $y=f(x)$,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y'$$

resulta:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = y' + \eta$$

en donde η tiende a cero con $\Delta x \to 0$, resultando la siguiente expresión del incremento Δy de la función:

$$\Delta y = y' \, \Delta x + \eta \, \Delta x$$

112.- DERIVADA DE UNA FUNCION DE FUNCION.

Si se tiene una función $y = f(u)$ en donde $u = \varphi(x)$, la y será una función de la x a través de la variable u.

Por la fórmula que expresa el incremento de una función correspondiente a un dado incremento para la variable, se tiene, considerando a y como función de u:

$$\Delta y = f'(u) \, \Delta u + \eta \, \Delta u$$

válida también en el caso en que $\Delta u \to 0$, ya que será $\Delta y = 0$. Dividiendo ambos miembros por Δx para formar la relación incremental se tiene:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(u)\ \frac{\Delta u}{\Delta x} + \eta \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

que en el límite para $\Delta x \to 0$ resulta:

$$y' = f'(u).\ \varphi'(x)$$

resultado del que se desprende la regla para el cálculo de la derivada de una función de función que dice: La derivada respecto de la variable x de una función que depende de ella a través de otra variable u , es igual al producto de las derivadas de cada función respecto de la variable de la cual depende directamente.

Ejemplo: Sea por ejemplo nuestro problema el de calcular la derivada de $y\ \ (2\,x^3 - 3)^2$

En este caso debemos calcular la derivada de la potencia segunda de una función de la variable x , siendo la variable intermedia, el binomio que figura dentro del paréntesis. Al aplicar la regla para el cálculo de la derivada de una función de función se tendrá:

$$y' = 2\ (2\,x^3 - 3)\ .\ 6\,x^2$$

113.- DERIVADA DE UN LOGARITMO

Sea nuestra función $y = \lg\ x$, en donde indicamos con lg al logaritmo neperiano, es decir aquel que tiene por base el número e .

Aplicando el proceso que nos da la definición de derivada, incrementamos en Δx la variable, obteniendo el correspondiente incremento de la función, dado por:

$$\Delta y = \lg (x + \Delta x) - \lg x$$

Elaborando la diferencia de logaritmos del segundo miembro y expresándola como logaritmo del correspondiente cociente se obtiene:

$$\Delta y = \lg \left[\frac{x + \Delta x}{\Delta x} \right] = \lg \left(1 + \frac{x}{\Delta x} \right)$$

Formando el cociente incremental resulta:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x} \quad \lg \left(1 + \frac{x}{\Delta x} \right)$$

Multiplicando y dividiendo el segundo miembro por x , la anterior podrá expresarse según:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x} \cdot \frac{x}{\Delta x} \cdot \lg \left(1 + \frac{x}{\Delta x} \right)$$

$$= \frac{1}{x} \cdot \lg \left(1 + \frac{x}{\Delta x} \right)^{x/\Delta x}$$

En el límite, cuando $\Delta x \rightarrow 0$, $x/\Delta x \rightarrow \infty$, por lo que recordando la definición del número e , se tendrá:

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x} \cdot \lg \; e = \frac{1}{x}$$

Cuando la base del sistema de logaritmos sea distinta del número e , por ser $\log_a x = M \cdot \lg \; x$, en donde

el módulo del sistema de logaritmos en base a , $M = \frac{1}{\lg a}$,
se tendrá:

$$D \log_a x = \frac{1}{x \, . \, \lg a}$$

114.- DERIVADA DE UNA FUNCION EXPONENCIAL.

Sea nuestra función $y = e^x$. Incrementando la variable en Δx, obtendremos el correspondiente incremento de la función dado por:

$$\Delta y = e^{x + \Delta x} - e^x$$

Dividiendo por el incremento de la variable se tiene:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{e^{x+\Delta x} - e^x}{\Delta x} = e^x \, . \, \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$$

En el límite, cuando el incremento de la variable tienda a cero, se tendrá:

$$y' = e^x \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{x}$$

Demostraremos que el límite del segundo miembro tiende a 1.

Por definición de número e se tiene:

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

Tomando logaritmos en base e resulta

$$\lg \left[\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right] = \lg e = 1$$

Por ser el logaritmo de un límite igual al límite del logaritmo se tendrá:

$$\lim_{n \to \infty} \left[\lg \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n} \right] = 1$$

Llamando $\frac{1}{n} = \delta$, y observando que cuando $n \to \infty$; $\delta \to 0$, se podrá escribir:

$$\lim_{\delta \to 0} \left[\lg (1 + \delta)^{1/\delta} \right] = 1$$

$$\lim_{\delta \to 0} \left[\frac{\lg (1 + \delta)}{\delta} \right] = 1$$

llamando $\lg (1 + \delta) = \eta$, será $1 + \delta = e^{\eta}$, $\delta = e^{\eta} - 1$ y como, cuando $\delta \to 0$, $\delta \to 0$, se podrá escribir:

$$\lim_{\eta \to 0} \frac{\eta}{e^{\eta} - 1} = 1$$

será en consecuencia

$$\lim_{\eta \to 0} \frac{e^{\eta} - 1}{\eta} = 1 \qquad \text{c.q.d.}$$

por lo que resulta

$$D\, e^{x} = e^{x}$$

115.- <u>DERIVADAS DE LAS FUNCIONES CIRCULARES</u>.

116.- DERIVADA DE LA FUNCION $y = \text{sen } x$.

Al incrementar la variable en Δx, la función recibe un incremento dado por

$$\Delta y = \text{sen } (x + \Delta x) - \text{sen } x$$

$$= \text{sen } x \cos \Delta x + \cos x \text{ sen } \Delta x - \text{sen } x$$

Dividiendo por el incremento de la variable se tiene:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\cos x \text{ sen } \Delta x}{\Delta x} - \frac{\text{sen } x (1 - \cos \Delta x)}{\Delta x}$$

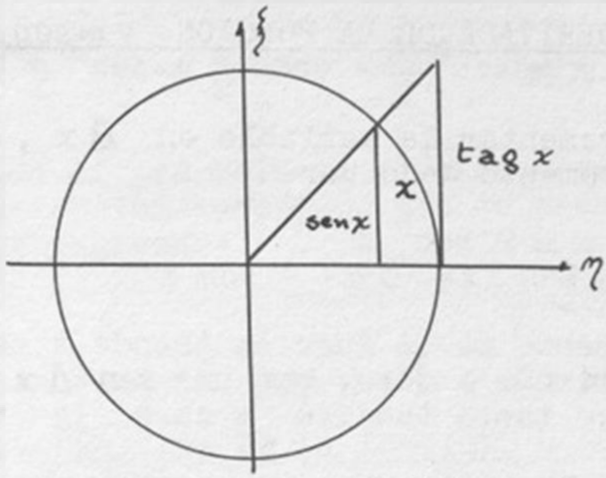
En el límite, cuando el incremento de la variable tiende a cero, la derivada de la función sen x tomará la siguiente forma:

$$y' = \cos x \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\text{sen } \Delta x}{\Delta x} - \text{sen } x \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1 - \cos \Delta x}{\Delta x}$$

Demostraremos que el primer límite tiende a la unidad.

La función $y = \frac{\text{sen } x}{x}$ evidentemente no está definida para el valor $x = o$, pero $\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen } x}{x}$ existe y es igual a la unidad.

Para todo x dado en radianes se tiene como lo prueba la figura:



$$\operatorname{sen} x < x < \operatorname{tag} x$$

Dividiendo por sen x resulta

$$1 < \frac{x}{\operatorname{sen} x} < \frac{1}{\cos x}$$

o sea

$$1 > \frac{\operatorname{sen} x}{x} > \cos x$$

Por estar la variable $\frac{\operatorname{sen} x}{x}$ constantemente comprendida entre la unidad y cos x , lo estará también en el límite cuando $x \to 0$, de donde resulta:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$$

c.q.d.

<u>Demostraremos que el segundo límite es cero</u>.

Partiendo de la relación estudiada para el coseno de la suma de dos ángulos

$$- \cos x = \operatorname{sen}^2 \frac{x}{2} - \cos^2 \frac{x}{2}$$

$$1 - \cos x = \operatorname{sen}^2 \frac{x}{2} - \cos^2 \frac{x}{2} + \operatorname{sen}^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2}$$

se tiene

$$1 - \cos x = 2 \operatorname{sen}^2 \frac{x}{2}$$

cuando el argumento de la función tiende a cero, el segundo miembro tiende a cero, con una potencia superior a la unidad, por tanto tenderá a cero la relación

$\frac{1 - \cos x}{x}$.

De estas dos demostraciones resulta que la derivada de la función $y = \operatorname{sen} x$ está dada por:

$$D \operatorname{sen} x = \cos x$$

117.- DERIVADA DE LA FUNCION $y = \cos x$.

Para obtener la derivada de esta función podríamos seguir un camino completamente semejante al desarrollado para el caso de la función $y = \operatorname{sen} x$, pero expresando el coseno de un arco en función del seno del complemento se tiene:

$$y = \cos x = \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

Al derivar esta función, aplicando la regla dada para la derivación de una función de función se tiene:

$$y' = -\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

que,en virtud de las relaciones existentes entre los valores de la función seno y coseno de arcos complementarios permite expresar:

$$D \cos x = -\operatorname{sen} x$$

118.- DERIVADA DE LA FUNCION $y = \operatorname{tag} x$.

Como la función tangente puede expresarse a través de la relación

$$\operatorname{tag} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$$

para calcular la derivada de la misma podremos aplicar la regla dada al estudiar la derivada de un cociente entre dos funciones. Se tiene así

$$y' = \frac{\cos x \ \cos x - (-\operatorname{sen} x) \operatorname{sen} x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x}$$

lo que permite expresar el siguiente resultado

$$D \operatorname{tag} x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

119.- DERIVADAS DE FUNCIONES TRIGONOMETRICA INVERSAS.

Siendo $\quad y = \operatorname{arc} \operatorname{sen} x \qquad (1)$

Será $\quad x = \operatorname{sen} y \qquad (2)$

Derivando ésta respecto de y se tiene

$$\frac{dx}{dy} = \cos y$$

Expresando el coseno en términos del seno se tiene

$$\frac{d\,x}{d\,y} = \sqrt{1 - \text{sen}^2\, y}$$

en donde, sustituyendo $\text{sen}^2 y$, por x^2 según la (2) resulta

$$\frac{d\,x}{d\,y} = \sqrt{1 - x^2}$$

Invirtiendo, a fin de tener $\frac{d\,y}{y\,x}$ resulta

$$\text{Darc. sen } x = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

Si se tiene: $y = \text{arc} \cos x$ (3)

será $x = \cos y$. (4)

Derivando respecto de y resulta

$$\frac{d\,x}{d\,y} = -\,\text{sen } y\,.$$

Expresando en ésta el sen y , en término del cos se tendrá:

$$\frac{d\,x}{d\,y} = -\sqrt{1 - \cos^2 y}$$

la que a su vez, por la (4) puede expresarse según

$$\frac{dx}{dy} = -\sqrt{1 - x^2}$$

Invirtiendo, a fin de tener $\frac{dy}{dx}$ resultará

$$D \text{ arc. cos } x = \frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

Si se tiene $\quad y = \text{arc tag } x \qquad (5)$

será $\quad x = \text{tag } y . \qquad (6)$

Derivando ambos miembros respecto de y se tendrá

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\cos^2 y}$$

Recordando en este momento la expresión del coseno de un ángulo en términos de la tangente del mismo

$$\cos y = \frac{1}{\sqrt{1 + \text{tag}^2 y}}$$

vista al estudiar nuestro capítulo sobre trigonometría, se tendrá

$$\frac{dx}{dy} = 1 + \text{tg}^2 y$$

que por la (6) puede expresarse:

$$\frac{dx}{dy} = 1 + x^2$$

Invirtiendo, a fin de tener $\frac{d\,y}{d\,x}$, resultará:

$$D \text{ arc. tag } x = \frac{1}{1+x^2}$$

120.- TABLA DE DERIVADAS.

f (u)	F (u)
$y = u^a$	$y' = a \,.\, u^{a-1} \,.\, Du$
$y = c$	$y' = 0$
$y = \sqrt{u}$	$y' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot Du$
$y = \frac{1}{u}$	$y' = -\frac{1}{u^2} \,.\, Du$
$y = a^u$	$y' = a^u \,.\, \lg a \,.\, Du$
$y = e^u$	$y' = e^u \,.\, Du$
$y = \lg u$	$y' = \frac{1}{u} \,.\, Du$
$y = \log u$	$y' = \frac{M}{u} \,.\, Du = 0.43 \,.\, \frac{1}{u}\, Du$
$y = \text{sen } u$	$y' = \cos u \,.\, Du$

$$\frac{d\,x}{d\,y} = -\sqrt{1 - x^2}$$

Invirtiendo, a fin de tener $\frac{d\,y}{d\,x}$ resultará

$$D \text{ arc. cos } x = \frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

Si se tiene $y = \text{arc tag } x$ (5)

será $x = \text{tag } y$. (6)

Derivando ambos miembros respecto de y se tendrá

$$\frac{d\,x}{d\,y} = \frac{1}{\cos^2 y}$$

Recordando en este momento la expresión del coseno de un ángulo en términos de la tangente del mismo

$$\cos y = \frac{1}{\sqrt{1 + \text{tag}^2 y}}$$

vista al estudiar nuestro capítulo sobre trigonometría, se tendrá

$$\frac{d\,x}{d\,y} = 1 + \text{tg}^2 y$$

que por la (6) puede expresarse:

$$\frac{d\,x}{d\,y} = 1 + x^2$$

Invirtiendo, a fin de tener $\frac{d\,y}{d\,x}$, resultará:

$$D \text{ arc. tag } x = \frac{1}{1 + x^2}$$

120.- TABLA DE DERIVADAS.

f (u)	F (u)
$y = u^a$	$y' = a \,.\, u^{a-1} \,.\, D u$
$y = c$	$y' = 0$
$y = \sqrt{u}$	$y' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot Du$
$y = \frac{1}{u}$	$y' = - \frac{1}{u^2} \,.\, Du$
$y = a^u$	$y' = a^u \,.\, \lg a \,.\, Du$
$y = e^u$	$y' = e^u \,.\, Du$
$y = \lg u$	$y' = \frac{1}{u} \,.\, Du$
$y = \log u$	$y' = \frac{M}{u} \,.\, Du = 0.43 \,.\, \frac{1}{u}\, Du$
$y = \text{sen } u$	$y' = \cos u \,.\, Du$

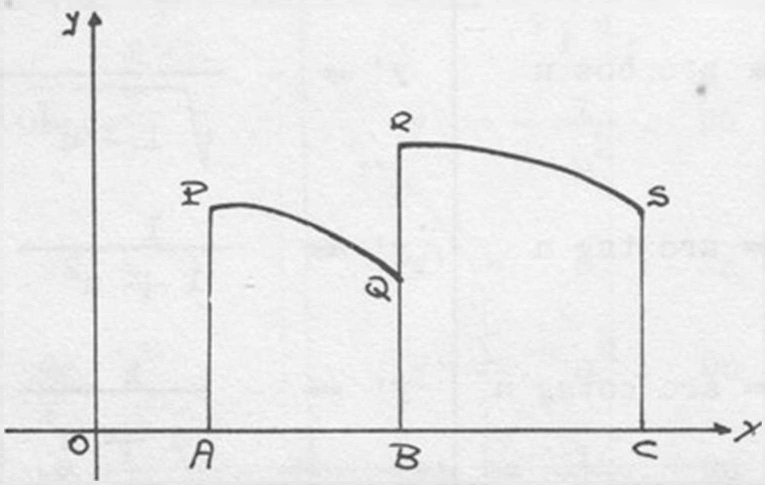
$y = \cos\ u$	$y' = -\ \text{sen}\ u\ .\ Du$
$y = \text{tag}\ u$	$y' = \dfrac{1}{\cos^2 u}\ .\ Du$
$y = \text{cotg}\ u$	$y' = \sec u.\ \text{tag}\ u\ .\ Du$
$y = \text{cosec}\ u$	$y' = \text{cosec}\ u\ .\ \text{ctag}\ u\ .\ Du$
$y = \text{cosec}\ u$	$y' = -\ \text{cosec}\ u\ .\ \text{ctag}\ u\ .\ Du$
$y = \text{arc sen}\ u$	$y' = \dfrac{1}{\sqrt{1 - u^2}} \cdot D\,u$
$y = \text{arc cos}\ u$	$y' = -\ \dfrac{1}{\sqrt{1 - u^2}} \cdot D\,u$
$y = \text{arc tag}\ u$	$y' = \dfrac{1}{1 + u^2} \cdot D\,u$
$y = \text{arc cotag}\ u$	$y' = -\ \dfrac{1}{1 + u^2} \cdot D\,u$
$y = \text{arc sec}\ u$	$y' = \dfrac{1}{u\sqrt{u^2 - 1}} \cdot D\,u$
$y = \text{arc cosec}\ u$	$y' = \dfrac{-1}{u\sqrt{u^2 - 1}} \cdot D\,u$

121.- CONTINUIDAD DE FUNCIONES DE UNA VARIABLE.

Una función $y = f(x)$ se dice continua en un intervalo a,b cuando al variar la x en a,b, la correspondiente y describe una línea ininterrumpida. Así por ejemplo la función $y = x^2$ es continua para todo x, mientras que la función $y = \frac{1}{x+1}$ es continua para todo x distinto del valor -1.

Se observa en este caso que al tender la variable x al valor -1, la función se hace infinita, pasando bruscamente de un valor a otro. En este punto se dice que la función es discontínua.

Se pueden considerar dos tipos de discontinuidad i) discontinuidad infinita, como en el ejemplo dado para el punto $x = -1$; ii) discontinuidad finita como la que muestra el siguiente gráfico:



Mientras la variable x se mueve desde A hasta B, la función describe el arco $\overset{\frown}{PQ}$; al moverse x en el intervalo $B\,C$, la y describe el arco $\overset{\frown}{RS}$. Como se ve para $x = B$, la función es discontinua ya que pasa bruscamente del valor Q al valor R.

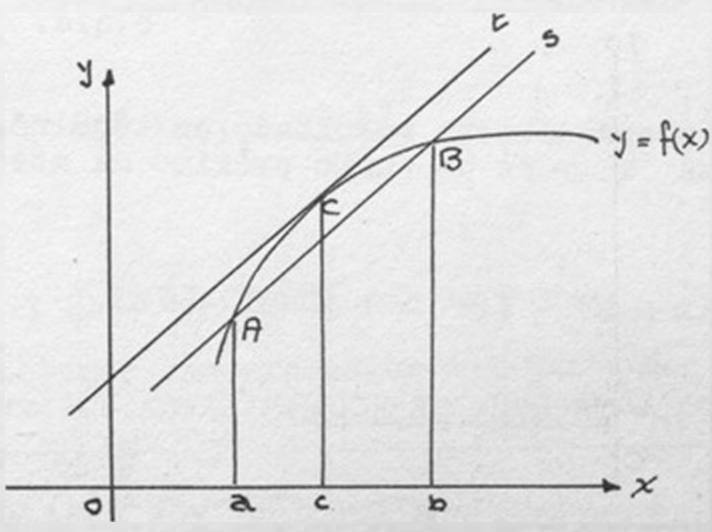
Cuando x tiende a B por la izquierda , y tiende a Q; mientras que cuando x tiende a B por la derecha, y tiende a R . Este tipo de discontinuidad finita es el menos común, siendo el más frecuente el que corresponde al caso en que la función pasa por un valor infinito.

122.- TEOREMA DE LOS INCREMENTOS FINITOS.

Consideremos una función y f(x) , contínua y con derivada contínua en todo punto de un intervalo a , b . El teorema de los incrementos finitos nos dice que en esas condiciones existe al menos un punto c , interior al intervalo a , b en donde sea

$$f(b) - f(a) = (b - a)\ f'(c)$$

Observemos los elementos que componen el siguiente gráfico:



en donde, como se observa, s denota una recta que seca a la curva de ecuación y = f(x) en los puntos A y B , y t indica una recta tangente a la curva en el punto C. Como las coordenadas de A y B son respectivamente x = a , y = f(a) ; x = b , y = f(b), la recta s tendrá por coeficiente angular

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Es evidente que en algún punto interior al intervalo a , b , la tangente a la curva es paralela a la secante y; como el coeficiente angular de dicha tangente está medido por el valor de la derivada de la función en dicho punto, se tendrá, siendo $a < c < b$:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

de donde resulta

$$f(b) - f(a) = (b - a)\, f'(c)$$

c.q.d.

Expresando este resultado en términos de un punto de abscisa x y de un punto próximo de abscisa $x + h$, se tiene:

$$f(x + h) - f(x) = h\, f'(x + \theta h) \quad ; \quad 0 < \theta < 1$$

123.- TEOREMA DE ROLLE.

Consideremos una función $y = f(x)$, uniforme, contínua y con derivada única para todo punto de un cierto intervalo. El teorema de Rolle nos dice: Si a y b son dos raíces consecutivas de la ecuación $f(x) = 0$, existirá al menos un punto c interior al intervalo a , b tal que $f'(c) = 0$.

En efecto, aplicando el teorema de los incrementos finitos se tiene, siendo $f(a) = 0$, $f(b) = 0$, que $f'(c) = 0$. c.q.d.

124.- FORMULA DE TAYLOR.

Consideremos una función y $f(x)$, uniforme y contínua en todo punto de un cierto intervalo que comprende los puntos a y b, y admitiendo derivada hasta un cierto orden n inclusive.

La fórmula de Taylor nos dice en tales condiciones

$$f(b)=f(a)+\frac{b-a}{1}f'(a)+\frac{(b-a)^2}{2!}f''(a)+\ldots+\frac{(b-a)^n}{n!}f^{(n)}(c)$$

en donde $a < c < b$.

Para demostrar esta fórmula partimos de la siguiente igualdad:

$$f(b)=f(a)+\frac{b-a}{1}f'(a)+\frac{(b-a)^2}{2!}f''(a)+\ldots+\frac{(b-a)^n}{n!}A$$

en donde A queda definida por la misma.

Para obtener una expresión del valor de A consideremos la función auxiliar

$$\varphi(x)=-f(b)+f(x)+\frac{b-x}{1}f'(x)+\frac{(b-x)^2}{2!}f''(x)+\ldots+\frac{(b-x)^n}{n!}A$$

Por los supuestos efectuados más arriba, esta función es contínua en el intervalo a b, y admite derivada en cada punto de dicho intervalo. Aplicando a la función anterior el teorema de Rolle, y observando que para:

$$x = a \quad , \quad \varphi(a) = 0$$

$$x = b \qquad \varphi(b) = 0$$

la derivada de la misma $\varphi'(x)$ se anulará para un cierto valor c, interior al intervalo a,b. Existirá así un $a < c < b$ tal que: $\varphi'(c) = 0$

Calculemos la derivada de la función $\varphi(x)$;

$$\varphi'(x) = f'(x) + \left[- f'(x) + (b-x) f''(x) \right] +$$

$$+ \left[- \frac{(b-x)}{1} f''(x) + \frac{(b-x)^2}{2!} f'''(x) \right] +$$

$$+ \left[- \frac{(b-x)^2}{2!} f'''(x) + \frac{(b-x)^3}{3!} f^{iv}(x) \right] +$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$+ \left| - \frac{(b-x)^{n-2}}{(n-2)!} f^{(n-1)}(x) + \frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(x) \right| +$$

$$- \left| \frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!} A \right|$$

de donde resulta

$$\varphi'(x) = \frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!} \left| f^{(n)}(x) - A \right|$$

Como el teorema de Rolle nos dice que la anterior se anula para $x = c$, se tendrá así el valor de A dado por

$$A = \left[f^{(n)}(x) \right]_{x = c}$$

Sustituyendo este valor de A , en la igualdad inicial, queda demostrada la fórmula de Taylor.

Si en la expresión de la Fórmula de Taylor consideramos $a = 0$, y $b = h$, se tendrá:

$$f(h) = f(0) + h'(0) + \frac{h^2}{2!} f''(0) + \frac{h^3}{3!} f'''(0) + \ldots \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(\theta h)$$

(siendo $0 < \theta < 1$), fórmula que se conoce bajo el nombre de fórmula de Mac Laurin y que nos permite expresar el valor que toma la función $y = f(x)$ en un punto cualquiera del campo donde está definida, conociendo el valor de la función y de sus sucesivas derivadas en el origen.

125.- DESARROLLO EN SERIE DE UNA FUNCION.

Veamos algunas aplicaciones de la fórmula de Mac Laurin que permiten desarrollar en serie de potencias una función dada.

Consideremos la función $y = \text{sen } x$. El valor de la función y de las sucesivas derivadas en el origen está dado por

$$f(x) = \text{sen } x \qquad f(0) = \text{sen } 0 = 0$$

$$f'(x) = \cos x \qquad f'(0) = \cos 0 = 1$$

$$f''(x) = -\text{sen } x \qquad f''(0) = -\text{sen } 0 = 0$$

$$f'''(x) = -\cos x \qquad f'''(0) = -\cos 0 = -1$$

. . ..

Se tendrá, sustituyendo estos valores en la fórmula de Mac Laurin, el siguiente desarrollo en serie de la función sen x .

$$\text{sen } x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots$$

Consideremos el desarrollo de la función $y = (1 + x)^m$

$$f(x) = (1 + x)^m \qquad f(0) = 1$$
$$f'(x) = m\,(1 + x)^{m-1} \qquad f'(0) = m$$
$$f''(x) = m\,(m - 1)(1 + x)^{m-2} \qquad f''(0) = m.(m-1)$$
$$f'''(x) = m\,(m-1)(m-2)(1+x)^{m-3} \qquad f'''(0) = m.(m-1).(m-2)$$

. . . .

Se tendrá, sustituyendo estos valores en la fórmula de Mac Laurin, el siguiente desarrollo en serie de la función $(1 - x)^m$

$$(1 + x)^m = 1 + \frac{m}{1}\,x + \frac{m(m-1)}{2!}\,x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}\,x^3 + \ldots$$

$$= 1 + \left(\frac{m}{1}\right) x + \left(\frac{m}{2}\right) x^2 + \left(\frac{m}{3}\right) x^3 + \ldots$$

Formula que ya conocíamos cuando calculamos el desarrollo de la potencia entera de un binomio.

Consideremos el desarrollo de la función $y = \lg(1 + x)$

La función y sus sucesivas derivadas presenta en el origen los siguientes valores:

$$f(x) = \lg\,(1 + x) \qquad f(0) = 0$$
$$f'(x) = (1 + x)^{-1} \qquad f'(0) = 1$$
$$f''(x) = (-1)\,(1 + x)^{-2} \qquad f''(0) = -1$$
$$f'''(x) = (-1)\,(-2)\,(1 + x)^{-3} \qquad f'''(0) = 2!$$
$$f^{iv}(x) = (-1)\,(-2)\,(-3)\,(1 + x)^{-4} \qquad f^{iv}(0) = -3!$$

. . . .

Resultará en consecuencia:

$$\lg (1 + x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots$$

que se conoce bajo el nombre de serie logarítmica.

126.- MAXIMOS Y MINIMOS.

127.- DETERMINACION DE LAS CONDICIONES NECESARIA Y SUFICIENTE PARA LA EXISTENCIA DE MAXIMOS Y MINIMOS EN FUNCIONES DE UNA VARIABLE INDEPENDIENTE.

La definición dada para la existencia de máximo o mínimo de una función, en un punto, es la siguiente:

a) Máximo: Se dice que una función continua $y = f(x)$ pasa por un máximo en un punto cuando el valor de la función en ese punto es superior a los valores que toma la función en cualquier punto próximo.

Si con x denotamos el punto de máximo se tendrá $f(x) > f(x + h)$, para h infinitésimo, positivo o negativo.

b) Mínimo: Se dice que una función continua $y = f(x)$ pasa por un mínimo en un punto cuando el valor de la función en ese punto es inferior al valor que toma la función en todo punto de su entorno.

Así, se deberá cumplir $f(x) < f(x + h)$, siendo h infinitésimo, positivo o negativo.

En cada uno de estos dos casos observamos que la existencia de un máximo o de un mínimo está supeditada a diferencia $f(x) - f(x + h)$, no cambia de signo cualquiera sea el valor de h, positivo o negativo.

Recordando el desarrollo en serie de una función mediante la fórmula de Taylor

$$f(x+h) = f(x) + \frac{h}{1} f(x) + \frac{h^2}{2!} f''(x) + \frac{h^3}{3!} f''' (x) + \dots$$

se observa una expresión de la diferencia en cuestión, con el signo cambiado, en:

$$f(x+h) - f(x) = h\, f'(x) + \frac{h^2}{2!} f''(x) + \frac{h^3}{3!} f'''(x) + \dots$$

Como en el segundo miembro de la anterior figuran las sucesivas potencias de h, infinitésimo, el signo de todo el segundo miembro estará determinado por el signo del infinitésimo de menor orden, o sea el signo del término en h. Para que el segundo miembro no cambie de signo al tomar h valores positivos o negativos será <u>necesario</u> que el primer término se anule, es decir $f'(x) = 0$. Visto ésto, para que la diferencia sea definida positiva, como corresponde a un <u>mínimo</u>, será <u>suficiente</u> con que $f''(x) > 0$ y para que la diferencia sea definida negativa, como corresponde a un <u>máximo</u>, será <u>suficiente</u> con que $f''(x) < 0$.

EJEMPLO:

Determinar los valores de la variable en que la función $y = \operatorname{sen} x$ pasa por un máximo o por un mínimo.

La condición necesaria para la existencia de un extremo, es decir de un máximo o de un mínimo, $f'(x) = 0$, nos permite determinar los valores de x que cumplen tal condición

$$D \operatorname{sen} x = \cos x$$

de donde resulta:

$$x = \frac{\pi + 2K\pi}{2}$$, siendo k entero, positivo o negativo.

a fin de determinar los correspondientes puntos de máxima y mínima, calculamos la segunda derivada y la valorizamos en los puntos hallados. Se tendrá así:

$$- \operatorname{sen} \frac{\pi + 2k\pi}{2} = \begin{cases} +1 & \text{para valores de } k \text{ impares} \\ -1 & \text{para valores de } k \text{ pares} \end{cases}$$

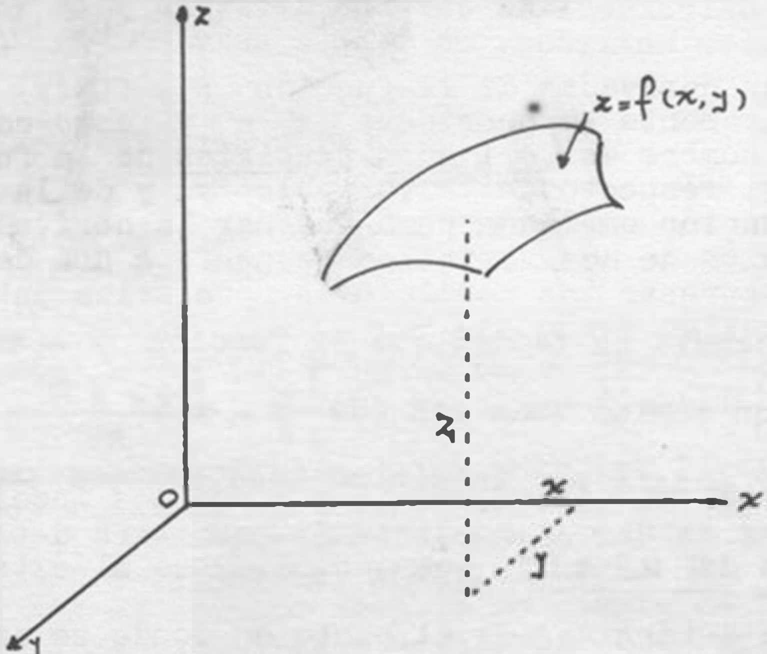
en consecuencia se tendrá que la función $y = \operatorname{sen} x$ pasará por un máximo toda vez que $x = \frac{\pi + 2k\pi}{2}$ siendo k par; y pasará por un mínimo toda vez que sea

$$x = \frac{\pi + 2k\pi}{2} \quad \text{siendo } k \text{ impar.}$$

128.- <u>MAXIMOS Y MINIMOS EN FUNCIONES DE DOS VARIABLES.</u>

129.- <u>CONSIDERACIONES INTUITIVAS ACERCA DE LAS CONDICIONES NECESARIAS PARA QUE UNA FUNCION DE DOS VARIABLES INDEPENDIENTES PASE POR UN MAXIMO O POR UN MINIMO.</u>

Sea $z = f(x,y)$ una función de dos variables independientes x, e y. En caso de tratarse de una función contínua, la representacion geométrica de la misma será una superficie en el espacio tridimensional x, y, z.



Interesará también en este caso determinar los valores de x e y en donde la función pasa por un máximo o por un mínimo.

Si por el punto en donde la función pasa por un máximo, hacemos pasar un plano orientado paralelo al plano z, o, y, el mismo secará a la superficie según una curva c_1, cuya ecuación será $z = f(x,y)$, siendo x constante e igual a H, distancia del plano orientado al plano de referencia. Si por el punto de máxima hacemos pasar otro plano orientado paralelo al plano de referencia z,o,x, el mismo secará a la superficie según otra curva c_2, cuya ecuación será $z = f(x,y)$ siendo y constante e igual a k, distancia del plano orientado al plano de referencia.

Intuitivamente se observa que en aquel punto en que la función $z = f(x,y)$ pase por un máximo, las dos curvas c_1 y c_2, pasarán respectivamente por un máximo.

Será necesario entonces que se verifiquen las siguientes condiciones:

$$D_y\ f(x,y) = 0 \quad , \quad D_x\ f(x,y) = 0$$

Estas derivadas de la función $z = f(x,y)$, en donde respectivamente se considera x e y como constantes, reciben el nombre de derivadas parciales de la función $z = f(x,y)$, respecto de la variable y, y de la variable x . La notación empleada para indicar la derivada parcial de una función de dos variables respecto a una de ellas, permitirá expresar las condiciones necesarias para la existencia de máximo según

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 0 \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

El sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas provisto por estas dos condiciones permitirá determinar los valores de x e y correspondientes al extremo.

Para determinar si el punto en donde se anulan las derivadas parciales primeras es efectivamente un punto de máxima o de mínima, y además distinguir el tipo de extremo, se deberá apelar a las derivadas segundas de la función, pero omitiremos esta discusión sustituyendo, en cada caso, la misma por una interpretación del problema en cuestión.

EJEMPLO

Determinar el punto en que la siguiente función de dos variables pasa por un mínimo:

$$z = x^2 + y^2 - 2x - 4y + 6$$

Las condiciones necesarias para la existencia de un extremo serán:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x - 2 = 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2y - 4 = 0$$

Como la solución del sistema así formado es $x = 1$, $y = 2$, resulta por lo expuesto anteriormente que en el punto $P(1,2)$, la función z pasa por un extremo, que la observación de la gráfica correspondiente a la superficie se indica como un mínimo.

130.- AJUSTAMIENTO POR MINIMOS CUADRADOS

Supongamos tener un conjunto de datos experimentales correspondientes a una serie de observaciones sobre las variables x e y, ligadas en un cierto fenómeno.

Así dispuesto el problema, ante un conjunto de datos x_i , y_i ; $(i = \overline{1,n})$, se buscará encontrar una cierta <u>función de ajustamiento</u> que interprete dicha relación experimental.

En la determinación de la función $y = f(x)$ que ajuste a los datos experimentales, el problema presenta los características:

1.- Elección de la forma de la función de ajustamiento.
2.- Determinación de los parámetros de la misma a fin de que satisfaga ciertas condiciones.

El primer problema tiene una solución arbitraria, ligada a la disposición de los puntos correspondientes a los pares de valores observados, que nos inspirarán para adoptar de entre las infinitas funciones, una recta, un polinomio de segundo grado, de tercer grado, etc., una función exponencial, una logarítmica, etc. En el caso de decidirnos por un polinomio como función de ajustamiento, el grado del mismo podrá determinarse según uno de los dos procedimientos siguientes:

1.- Trazar a mano levantada la gráfica correspondiente a la función de ajustamiento y determinar luego el número máximo de veces que una recta corta a dicha curva. Este número indica el grado del polinomio de ajustamiento más conveniente.

2.- Si los valores de x_i están equiespaciados, se determinará el orden de las diferencias finitas $\Delta^{(n)} y_i$ que resulten más o menos constantes, y se adoptará dicho orden: n ,como grado del polinomio de ajustamiento.

131.- DETERMINACION DE LOS PARAMETROS DE LA LINEA DE AJUSTAMIENTO.

Esta línea puede referirse a la interpretación de un cierto fenómeno estático (correlación) o dinámico (tendencia de una serie) y presenta en ambos casos problemas distintos. En el segundo, interpreta la evolución de una serie para un determinado período, y permite obtener valores de pronóstico. No se puede dejar de mencionar en este caso, la influencia de los valores extremos que modificarán eventualmente la ecuación de la línea de ajustamiento por presentarse una nueva y distinta tendencia. La selección de los valores a ajustar merece por tanto, un cuidadoso estudio, ya que de los mismos dependerá la ecuación de la línea de tendencia.

Para ambos fenómenos, estáticos o dinámicos, el cálculo de los parámetros de la línea de ajustamiento es completamente similar, y en la mayor parte de las aplicaciones se seguirá el método de los mínimos cuadrados.

Se pide en este método que los parámetros de la línea de ajustamiento sean tales que hagan un mínimo la suma de los cuadrados de los desvíos entre los valores experimentales y los teóricos.

Como los valores experimentales y_1 , y_2, ... , y_n, son los datos del problema, y los valores teóricos y'_1, y'_2, ... , y'_n , están dados por los respectivos valores de la función de ajustamiento en x_1 , x_2 , ... , x_n , se observa que los desvíos producidos entre los mismos dependen exclusivamente de la ecuación (o sea de los parámetros) de la línea de ajustamiento.

Así, si consideramos como función de ajustamiento correspondiente a un determinado fenómeno, un polinomio de primer grado cuya ecuación general será $y = a + b\,x$, la condición de los mínimos cuadrados nos conduce a la determinación de los puntos de mínima de la siguiente función:

$$z = \sum_{i=1}^{n} \left[y_i - a - b\, x_i \right]^2$$

Por depender los valores de z, de a y de b, la solución de este problema estará dada por las condiciones necesarias para la existencia de mínimo en una función de dos variables:

$$\frac{\partial z}{\partial a} = 0 \qquad\qquad \frac{\partial z}{\partial b} = 0$$

que resulta en nuestro caso:

$$\frac{\partial z}{a} = 2 \sum \left[y_i - a - b\, x_i \right] (-1) = 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial b} = 2 \sum \left[y_i - a - b\, x_i \right] (-x_i) = 0$$

y permite formar el sistema:

$$n\, a - b \sum x_i = \sum y_i$$

$$a \sum x_i - b \sum x_i^2 = \sum x_i\, y_i$$

Este podrá ser resuelto aplicando la regla de Cramer o cualquier otro procedimiento de solución de un sistema de ecuaciones lineales.

En el caso de referirse nuestro problema a una serie económica, como la variable, x, correspondiente a períodos de tiempo presentará en general un equiespaciamiento, convendrá adoptar una escala de cálculo convenientemente centrada a fin de que $\sum x_i = 0$, con lo que se simplifica el sistema.

132.- AJUSTAMIENTO DE FUNCIONES EN QUE LOS PARAMETROS NO FIGUREN LINEALMENTE.

Si en la elección de la función de ajustamiento nos decidiéramos por una función exponencial, cuya forma más general es

$$y = a \, . \, e^{bx}$$

y tratáramos de afrontar directamente el cálculo de los parámetros que aparecen en la misma, imponiendo como hiciéramos anteriormente la condición de los mínimos cuadrados, se tendría:

$$z = \sum \left[y_i - a \, . \, e^{bx_i} \right]^2$$

$$\frac{\partial z}{\partial a} = 2 \sum \left[y_i - a \, . \, e^{bx_i} \right] (-e^{bx_i}) = 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial b} = 2 \sum \left[y_u - a \, . \, e^{bx_i} \right] (-a . e^{bx_i} . x_i) = 0$$

que conduce al siguiente sistema

$$a \sum e^{2bx_i} = \sum y_i \, e^{bx_i}$$

$$a^2 \sum e^{2bx_i} . x_i = \sum y_i \, e^{bx_i} . \, x_i$$

que nos muestra las dificultades que se presentan cuando se enfrenta uno con este tipo de problemas en que los parámetros no figuran linealmente.

A fin de resolver este problema convendrá transformar la función escogida llevándola a una forma en que los parámetros figuren linealmente, ajustando entonces la función transformada.

Logaritmando ambos miembros de la función exponencial se tiene:

$$\log y = \log a + x \, . \, b \log e$$

Esta función así transformada presenta linealmente los parametros

$$A = \log a \quad ; \quad B = b \, . \log e$$

El problema se reduce así a ajustar los valores

$$x_i \, , \, Y_i = \log \, y_i \quad ; \quad (i = \overline{1,n})$$

mediante la función

$$Y = A + B \, x$$

lo que nos conduce como ya viéramos al sistema

$$n \, A - B \sum x_i = \sum Y_i$$

$$A \sum x_i - B \sum x_i^2 = \sum x_i Y_i$$

que una vez resuelto nos proveerá los valores de A y B , los que permiten expresar

$$a = \text{antilog } A$$

$$b = B \div \log e$$

que son los parámetros de nuestra función de ajustamiento.

133.- INTERPOLACION

Dado un conjunto de pares de valores x_i , y_i ; $i = \overline{1\,,\,n}$ interesará conocer la función $y = f(x)$, a la cual corresponden los pares de valores observados. Interpolar un conjunto de puntos significará encontrar una función que cumpla $f(x_i) = y_i$, es decir tal que la gráfica representativa de la misma pase por los puntos dados.

Este problema así planteado, está indeterminado, ya que existen infinitas funciones que satisfagan tales condiciones. Para obviar esta indeterminación, y por ser los polinomios una de las funciones más simples que conocemos, siempre que hablemos de interpolar una función a un conjunto de pares de valores nos referiremos al polinomio que cumpla la condición $P_n(x_i) = y_i$; $i = \overline{1,n}$. Si tuviéramos dos puntos a interpolar, el polinomio de interpolación será de primer grado, ya que en el mismo figuran dos parámetros a determinar; si se quisiera interpolar tres puntos, se eligirá un polinomio de segundo grado; y en general, si se tienen $n + 1$ puntos, el correspondiente polinomio de interpolación deberá ser de grado n.

Como la determinación de un polinomio de interpolación correspondiente a $n + 1$ pares de valores experimentales, implica la solución de un sistema de $n + 1$ ecuaciones con $n + 1$ incógnitas, con las subsiguientes dificultades, presentaremos dos métodos, denominados de Newton y Lagrange respectivamente, que nos permitirán obtener más facilmente dicho polinomio.

134.- METODO DE INTERPOLACION DE NEWTON

Se aplica cuando las observaciones corresponden a valores equidistantes de la variable x, es decir existe el equispaciamiento:

$$x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = x_3 - x_2 = \dots = x_n - x_{n-1} = h.$$

Este método se basa en las propiedades de las diferencias finitas. Un conjunto de pares de valores x_i, y_i conduce al siguiente cuadro de diferencias finitas.

x	y	Δy	$\Delta^{(2)} y$	$\Delta^{(3)} y$
x_0	y_0	$\Delta y_0 = y_1 - y_0$	$\Delta^{(2)} y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0$	$\Delta^{(3)} y_0 = \Delta^{(2)} y_1 - \Delta^{(2)} y_0$
x_1	y_1	$\Delta y_1 = y_2 - y_1$	$\Delta^{(2)} y_1 = \Delta y_2 - \Delta y_1$	$\Delta^{(3)} y_1 = \Delta^{(2)} y_2 - \Delta^{(2)} y_1$
x_2	y_2	$\Delta y_2 = y_3 - y_2$	$\Delta^{(2)} y_2 = \Delta y_3 - \Delta y_2$	. . . . .
x_3	y_3	$\Delta y_3 = y_4 - y_3$	. . . .	
x_4	y_4	. . .		

Si se quisiera tener una expresión de las sucesivas diferencias en función de los valores iniciales, se tendría:

$$\Delta y_0 = y_1 - y_0$$

$$\Delta^{(2)} y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0 = (y_2 - y_1) - (y_1 - y_0) = y_2 - 2\,y_1 + y_0$$

$$\Delta^{(3)} y_0 = \Delta^{(2)} y_1 - \Delta^{(2)} y_0 = (y_3 - 2y_2 + y_1) - (y_2 - 2y_1 + y_0)$$

$$= y_3 - 3\,y_2 + 3\,y_1 - y_0$$

$$\Delta^{(4)} y_0 = (y_4 - 3\,y_3 + 3\,y_2 - y_1) - (y_3 - 3\,y_2 + 3\,y_1 - y_0)$$

$$= y_4 - 4\,y_3 + 6\,y_2 - 4\,y_1 + y_0$$

y en general:

$$\Delta^{(n)} y_0 = y_n - \binom{n}{1} y_{n-1} + \binom{n}{2} y_{n-2} - \binom{n}{3} y_{n-3} + \cdots + (-1)^n y_0$$

Expresando ahora los sucesivos valores de y en función del anterior y de las diferencias observadas se tiene:

$$y_1 = y_0 + \Delta y_0$$

$y_2 = y_1 + \Delta y_1$, y como $y_1 = \Delta y_0 + \Delta^{(2)} y_0$, se tiene:

$$= y_0 + \Delta y_0 + \Delta y_0 + \Delta^{(2)} y_0 = y_0 + 2\,\Delta y_0 + \Delta^{(2)} y_0$$

$y_3 = y_2 + \Delta y_2$, y como $y_2 = \Delta y_1 + \Delta^{(2)} y_1$

siendo $\Delta^{(2)} y_1 = \Delta^{(2)} y_0 + \Delta^{(3)} y_0$, resulta:

$$\Delta y_2 = \Delta y_0 + \Delta^{(2)} y_0 + \Delta^{(2)} y_0 + \Delta^{(3)} y_0$$

$$= y_0 + 2\,\Delta y_0 + \Delta^{(2)} y_0 + \Delta y_0 + \Delta^{(2)} y_0 + \Delta^{(2)} y_0 + \Delta^{(3)} y_0$$

$$y_3 = y_0 + 3\,\Delta y_0 + 3\,\Delta^{(2)} y_0 + \Delta^{(3)} y_0$$

y así, por inducción:

$$y_n = y_0 + \binom{n}{1} \Delta y_0 + \binom{n}{2} \Delta^{(2)} y_0 + \cdots + \binom{n}{n} \Delta^{(n)} y_0$$

Observando que: $x_n = x_0 + n\,h$

resulta: $n = \dfrac{x_n - x_0}{h}$; $n-1 = \dfrac{x_n - x_1}{h}$; $n-2 = \dfrac{x_n - x_2}{h}$;...

sustituyendo estos valores en la expresión anterior se tiene:

$$y_n = y_0 + \frac{x_n - x_0}{1} \cdot \frac{\Delta y_0}{n} + \frac{(x_n - x_0)(x_n - x_1)}{2!} \cdot \frac{\Delta^{(2)} y_0}{n^2} + \cdots$$

$$\cdots + \frac{(x_n - x_0)\,(x_n - x_1)\,\ldots\,(x_n - x_{n-1})}{n\,!} \cdot \frac{\Delta^{(n)} y_0}{h^n}$$

Observamos que la anterior se cumple para todo n entero entre 0 y n ; en efecto:

$n = 0$; $y_0 = y_0 + 0$

$n = 1$; $y_1 = y_0 + \dfrac{(x_1 - x_0)}{h} \Delta y_0 + 0$

$$= y_o + 1 \ (y_1 - y_o)$$

$$= y_1 \ .$$

$$n = 2 \ ; \quad y_2 = y_o + \frac{x_2 - x_o}{h} \Delta y_o + \frac{(x_2 - x_o)(x_2 - x_1)}{h^2} \frac{\Delta^{(2)} y_o}{2!} + 0$$

$$= y_o + \frac{2\ h}{h} (y_1 - y_o) + \frac{2\ h\ h}{2!\ h^2} (\Delta y_1 + \Delta y_o)$$

$$= y_o + 2\ y_1 - 2\ y_o + (y_2 - y_1) - (y_1 - y_o)$$

$$= y_2$$

queda así comprobado que la función

$$y = y_o + \frac{(x - x_o)}{1!} \frac{\Delta y_o}{1!} + \frac{(x - x_o)(x - x_1)}{2!} \frac{\Delta^{(2)} y_o}{h^2} +$$

$$\cdots + \frac{(x - x_o)(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1})}{n\ !} \frac{\Delta^{(n)} y_o}{h^n}$$

a la que se conoce bajo el nombre de fórmula de interpolación de Newton, interpola efectivamente los pares de valores observados. Observemos cómo la misma provee un adecuado valor para la y correspondiente a un arbitrario valor de x .

EJEMPLO:

Dada la siguiente tabla de valores, interpolar el valor de y correspondiente a $x = 3$. Disponemos primeramente el cálculo de las diferencias finitas.

x	y	Δy	$\Delta^{(2)} y$	$\Delta^{(3)} y$	$\Delta^{(4)} y$
0	1	3	-2	4	-7
2	4	1	2	-3	
4	5	3	-1		
6	8	2			
8	10				

Sustituyendo estos valores en la fórmula de Newton se tiene el polinomio de interpolación correspondiente a nuestro ejemplo:

$$y = 1 + \frac{x-0}{1!}\,\frac{3}{2} + \frac{(x-0)(x-2)}{2!}\,\frac{(-2)}{4} + \frac{(x-0)(x-2)(x-4)}{3!}\,\frac{4}{8} +$$

$$+ \frac{(x-0)(x-2)(x-4)(x-6)}{4!}\,\frac{(-7)}{16}$$

Valorizando este polinomio para $x = 3$, se tendrá el valor de interpolación pedido, resultando:

$$y = 1 + \frac{3-0}{1!}\,\frac{3}{2} + \frac{(3-0)(3-2)}{2!}\,\frac{(-2)}{4} + \frac{(3-0)(3-2)(3-4)}{3!}\,\frac{4}{8} +$$

$$+ \frac{(3-0)(3-2)(3-4)(3-6)}{4!}\,\frac{(-7)}{16}$$

$$y = 1 + \frac{9}{2} - \frac{3}{4} - \frac{1}{4} - \frac{21}{128} + \frac{555}{128} = 4.33$$

Como el método de interpolación de Newton requiere que los valores observados de la variable y, correspondan a intervalos equiespaciados de la variable x, este método de interpolación encuentra su mayor aplicación en la determinación de valores intermedios de funciones tabuladas, para las que efectivamente se cumple la condición de equiespaciamiento.

Si se quisiera interpolar un conjunto de datos experimentales, para los cuales generalmente es muy dificil lograr la condición de equiespaciamiento, este método dejará de ser aplicable. A fin de disponer de un instrumento de interpolación adecuado para tales casos presentamos el siguiente:

135.- METODO DE INTERPOLACION DE LAGRANGE.

Si se tiene un conjunto de valores observados, correspondientes a pares de valores x_i, y_i ; $i = \overline{0,n}$,

se dirá que $P_n(x)$ es un polinomio que interpola los anteriores valores si: $P_n(x_o) = y_o$, $P_n(x_1) = y_1$, ... , $P_n(x_n) = y_n$.

Escribamos este polinomio de interpolación $P_n(x)$ como combinación lineal de $n+1$ polinomios de grado n, escritos éstos en su forma factorial.

$$
\begin{aligned}
P_n(x) = & \lambda_o (x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n) + \\
& + \lambda_1 (x - x_o)(x - x_2) \ldots (x - x_n) + \\
& + \lambda_2 (x - x_o)(x - x_1)(x - x_3) \ldots (x - x_n) + \cdots \\
& \cdots + \lambda_{n-1} (x - x_o)(x - x_1) \ldots (x - x_{n-2})(x - x_n) +
\end{aligned}
$$

$$+ \lambda_n (x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_{n-1})$$

y determinemos las constantes λ_o , λ_1 , etc., imponien do las condiciones antes mencionadas.

Observando que $P_n(x)$ resulta para $x = x_o$ igual a:

$$P_n(x_o) = \lambda_o(x_o - x_1)(x_o - x_2) \; . \; . \; . \; (x_o - x_n)$$

se determina el valor de λ_o haciendo $\lambda_o(x_o - x_1)(x_o - x_2) \ldots (x_o - x_n) = y_o$

de donde: $$\lambda_o = \frac{y_o}{(x_o - x_1)(x_o - x_2) \ldots (x_o - x_n)}$$

y paralelamente:

$$\lambda_1 = \frac{y_1}{(x_1 - x_o)(x_1 - x_2) \ldots (x_1 - x_n)}$$

$$\lambda_2 = \frac{y_2}{(x_2 - x_o)(x_2 - x_1) \ldots (x_1 - x_n)}$$

$$\lambda_n = \frac{y_n}{(x_n - x_o)(x_n - x_1) \ldots (x_n - x_{n-1})}$$

Puestos estos valores de λ_i en la expresión de $P_n(x)$ se tendrá:

$$P_n(x) = y_o \frac{(x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n)}{(x_o - x_1)(x_o - x_2) \ldots (x_o - x_n)} +$$

$$+ y_1 \frac{(x - x_o)(x - x_2) \ldots (x - x_n)}{(x_1 - x_o)(x_1 - x_2) \ldots (x_1 - x_n)} + \ldots$$

$$\ldots + y_n \frac{(x - x_o)(x - x_1) \ldots (x - x_{n-1})}{(x_n - x_o)(x_n - x_1) \ldots (x_n - x_{n-1})}$$

como expresión del polinomio de interpolación llamado de Lagrange.

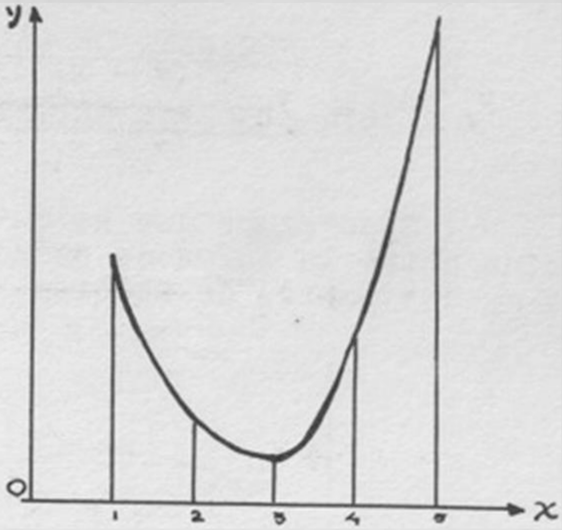
El inconveniente de esta fórmula es que no da el polinomio ordenado según las potencias decrecientes de la variable, y además tiene la particularidad de hacer completamente inutil todo el trabajo si se decidiera aumentar la aproximación lograda con los $n + 1$ valores y formar un nuevo polinomio de grado superior.

Como ventaja presenta, respecto al método de diferencias finitas, la particularidad de no requerir el equiespaciamiento de los valores de x_i, lo que lo hace ideal para interpolar datos provenientes de observaciones experimentales en que no se ha podido lograr el equiespaciamiento de los valores de una de las variables, y en particular para interpolar valores no provistos en una dada serie de tiempo.

EJEMPLO:

Consideremos el problema de interpolar, para el siguiente conjunto de pares de valores, el valor de la variable y, correspondiente a un $x = 3$

x	y
$x_o = 1$	$y_o = 3$
$x_1 = 2$	$y_1 = 1$
$x_2 = 4$	$y_2 = 2$
$x_3 = 5$	$y_3 = 6$



El polinomio de interpolación de Lagrange resulta, para los pares de valores observados:

$$P_3(x) = 3\,\frac{(x-2)(x-4)(x-5)}{(1-2)(1-4)(1-5)} + 1\,\frac{(x-1)(x-4)(x-5)}{(2-1)(2-4)(2-5)} +$$

$$+ 2\,\frac{(x-1)(x-2)(x-5)}{(4-1)(4-2)(4-5)} + 6\,\frac{(x-1)(x-2)(x-4)}{(5-1)(5-2)(5-4)} +$$

Valorizando el mismo para $x = 3$ se tiene:

$$P_3(3) = \frac{3\,(3-2)(3-4)(3-5)}{(1-2)(4-2)\,(4-5)} + \frac{1\,(3-1)(3-4)\,(3-5)}{(2-1)(2-4)(2-5)} +$$

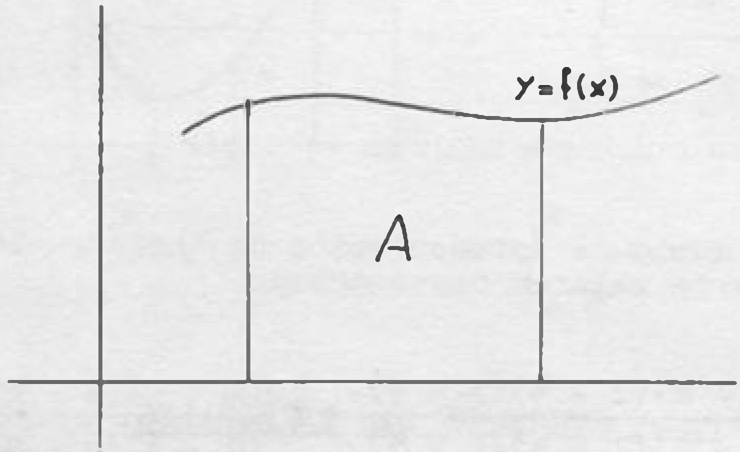
$$+ \frac{2(3-1)(3-2)(3-5}{(4-1)(4-2)(4-5)} + \frac{6(3-1)\,(3-2)(3-4)}{(5-1)(5-2)\,(5-4)}$$

$$P_3(3) = \frac{1}{2}$$

NOCIONES DE CALCULO INTEGRAL.

136.- CONCEPTO DE INTEGRAL.

Supongamos que se quiera calcular el area comprendida entre la curva de ecuación $y = f(x)$, el eje de las x, y dos puntos de abscisa a y b.



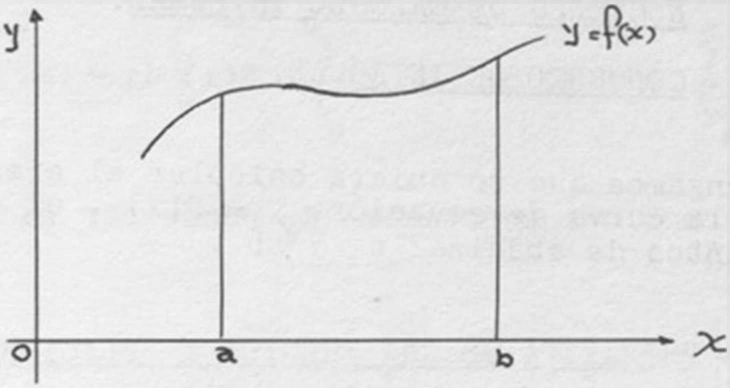
Denotaremos a la medida del área correspondiente a la superficie según:

$$A = \int_a^b f(x)\,dx$$

que se lee integral de la función $f(x)$ entre a y b.

los valores extremos de la variable: a y b, se denominan respectivamente extremos inferior y superior de integración. La función $y = f(x)$ recibe el nombre de integrando o función a integrar, mientras que el número A, medida del area, se denomina integral.

Observamos que cuando el extremo superior de integración, en lugar de permanecer fijo como en el caso anterior, es variable, el area bajo la curva es función del valor de dicho extremo superior.



Resulta entonces natural escribir

$$f(x) = \int_a^x f(x)\, dx$$

137.- PROPIEDADES DE LAS INTEGRALES.

1.- $$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx$$

que justifica descomponer el intervalo de integración a , b , en dos subintervalos: a , c , y c , d . Geométricamente equivale a descomponer el area correspondiente al intervalo a , b en suma de las areas correspondientes a los dos subintervalos.

2.- $$\int_a^b f(x)\, d\, x = - \int_b^a f(x)\, dx$$

que nos muestra cómo, al permutar los extremos de integración, la integral conserva su valor, pero cambia de signo.

3.- $$\int_a^b k\, f(x)\, dx = k \int_a^b f(x)\, dx$$

que muestra como una constante k, puede ser sacada fuera del símbolo de integral

138.- PRIMITIVA DE UNA FUNCION Y RELACION CON LA INTEGRAL.-

Afrontemos el problema de determinar la relación existente entre el integrando $f(x)$ y la integral $F(x)$.

Demostraremos que $DF(x) = f(x)$. Para ello calcularemos la derivada de la función $F(x)$, siguiendo el proceso de incrementar la variable, hallar el correspondiente incremento de la función, formar la relación incremental y hallar el límite de la misma cuando el incremento de la variable tiende a cero.

Así se tiene:

$$F(x + \Delta x) = \int_a^{x+\Delta x} f(x)\, dx$$

Descomponiendo esta integral en suma de dos integrales

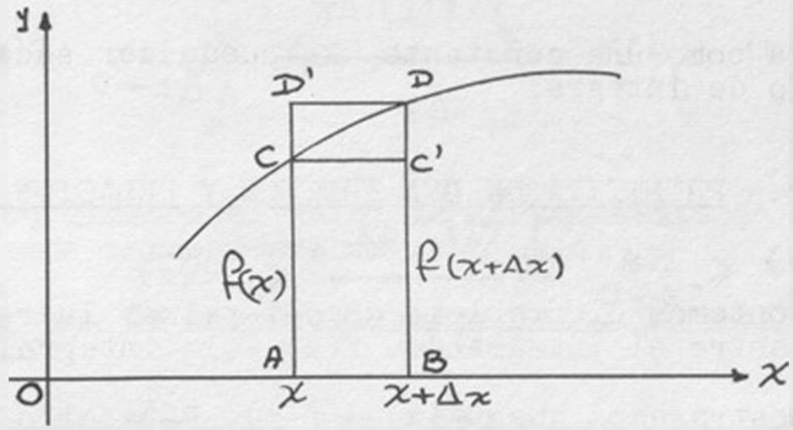
$$F(x + \Delta x) = \int_a^{x} f(x)\, dx + \int_x^{x+\Delta x} f(x)\, dx$$

se tendrá, como expresión del incremento de la función:

$$\Delta F(x) = F(x + \Delta x) - F(x)$$

$$= \int_a^{x} f(x)\, dx + \int_x^{x+\Delta x} f(x)\, dx - \int_a^{x} f(x)\, dx$$

$$\Delta F(x) = \int_{x}^{x+\Delta x} f(x)\,dx$$



Observemos que el area medida por la última integral, expresión del incremento de la función, está comprendida entre el area del rectángulo ABC'C y la del ABDD' cumpliéndose por lo tanto la relación

$$\text{área del ABC'C} \leqslant \int_{x}^{x+\Delta x} f(x)\,dx \leqslant \text{area del ABDD'}$$

y como el area de los respectivos rectángulos está dada por el producto de la base por la correspondiente altura, se tiene:

$$\Delta x \,.\, f(x) \leqslant \int_{x}^{x+\Delta x} f(x)\,dx \leqslant \Delta x \,.\, f(x+\Delta x)$$

Dividiendo por Δx, incremento de la variable, se tiene:

$$f(x) \leqslant \frac{\displaystyle\int_{x}^{x+\Delta x} x(x)\,dx}{\Delta x} \leqslant f(x+\Delta x)$$

Hallando el límite de esta relación incremental cuando $\Delta x \to 0$, resulta:

$$\lim_{\Delta x \to 0} f(x) \leqslant \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\int_x^{x+\Delta x} f(x)\,dx}{\Delta x} \leqslant \lim_{\Delta x \to 0} f(x+\Delta x)$$

$$f(x) \leqslant \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\int_x^{x+\Delta x} f(x)\,dx}{\Delta x} \leqslant f(x)$$

de donde:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\int_x^{x+\Delta x} f(x)\,dx}{\Delta x} = f(x)$$

Como el límite anterior es la expresión de la derivada de la función $F(x)$ resulta:

$$D\,F(x) = f(x) \qquad \text{c.q.d.}$$

Esta función $F(x)$ recibe el nombre de integral o primitiva de la función $f(x)$. En virtud de la propiedad que se acaba de demostrar, se tiene que una función $f(x)$ admite una familia de infinitas funciones primitivas, que difieren entre si en el valor de una constante.

En efecto, si:

$$D\,F(x) = f(x)$$

será

$$D\left[F(x) + C\right] = f(x)$$

por ser cero el valor de la derivada de la constante C

Resulta por lo tanto correcto escribir

$$\int_a^x f(x)\,dx = F(x) + C$$

Determinemos el valor de la constante de integración C , que corresponde en cada caso.

Por una de las propiedades de la integral definida observamos:

$$0 = \int_a^a f(x)\,dx = F(a) + C$$

de donde:

$$C = -F(a)$$

Puesto este resultado en la integral anterior resulta:

$$\int_a^x f(x)\,dx = F(x) - F(a)$$

expresión que se conoce bajo el nombre de fórmula de Barrow, que puede expresarse, cuando los extremos de integración sean fijos, según:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b$$

y que se lee: la integral de la función f(x) entre a y b , es igual a la función primitiva F(x), totalmente integrada entre a y b.

139.- TABLA DE PRIMITIVAS

Para resolver una integral definida debemos afrontar primeramente el cálculo de la correspondiente integral indefinida, es decir debemos encontrar primeramente aquella función F(x) tal que derivada me restituya la f(x).

Este problema, el de conocer las funciones primitivas de algunas funciones elementales, puede resolverse consultando en forma inversa, las tablas de derivadas de funciones elementales que presentáramos al desarrollar temas de cálculo diferencial. Se tendrá así:

1.- $$\int x^m \, dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + C \text{ , siendo } m \neq -1$$

2.- $$\int \frac{dx}{x} = \int x^{-1} \, dx = \lg x + C$$

3.- $$\int \sqrt{x} \, dx = \int x^{\frac{1}{2}} \, dx = \frac{x^{3/2}}{3/2} + C = \frac{2}{3} x^3 + C$$

4.- $$\int e^{kx} \, dx = \frac{e^{kx}}{k} + C$$

5.- $$\int a^{kx} \, dx = \frac{a^{kx}}{k.\lg a} + C$$

6.- $$\int \operatorname{sen} x \, dx = -\cos x + C$$

7.- $$\int \cos x \, dx = \operatorname{sen} x + C$$

8.- $$\int \frac{1}{\cos^2 x}\, dx = \text{tag } x + C$$

9.- $$\int \frac{1}{\cos^2 x}\, dx = -\text{ ctg } x + C$$

10.- $$\int \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx = \text{arc. sen } x + C$$

11.- $$\int \frac{1}{1 + x^2}\, dx = \text{arc. tag } x + C$$

Cuando se presente el problema de resolver la integral de una función que no aparece en nuestra tabla de primitivas,se deberá apelar a alguno de los siguientes métodos de integración.

METODOS DE INTEGRACION

140.- POR DESCOMPOSICION

La propiedad que justifica este método puede enunciarse así: La integral de una suma de funciones es igual a la suma de las integrales de las respectivas funciones:

Así se tendrá:

$$\int \left[f_1(x) + f_a(x) + \ldots + f_n(x) \right] dx = \int f_1(x)\, dx + \int f_2(x) dx + \ldots + \int f_n(x) dx$$

La aplicación del método de integración por descomposición permite calcular, por ejemplo, las siguientes integrales:

$$I = \int (x^2 - 4\, x^2 + 2\, x + 1)\, dx$$

$$= \int x^3\,dx - \int 4\,x^2\,dx + \int 2\,x\,dx + \int dx$$

$$= \frac{x^4}{4} + C_1 - 4\,\frac{x^3}{3} + C_2 + 2\,\frac{x^2}{2} + C_3 + x + C_4$$

Expresando en una única constante de integración, las constantes particulares C_1 , C_2 etc. se tendrá:

$$I = \frac{x^4}{4} - \frac{4}{3}\,x^3 + x^2 + x + C$$

2.- Resolver, por descomposición, la siguiente integral indefinida:

$$II = \int \left(x^2 - \frac{1}{x^2}\right) dx$$

$$= \int x^2 dx - \int \frac{1}{x^2}\,dx$$

$$= \frac{x^3}{3} + C_1 - \frac{x^{-1}}{-1} + C_2$$

resultado que puede expresarse según:

$$II = \frac{x^3}{3} + \frac{1}{x} + C$$

3.- Resolver, por descomposición, la siguiente integral indefinida:

$$III = \int \frac{x^2 + 2\,x + 1}{x^2}\,dx$$

distribuyendo el cociente e integrando término a término se tiene

$$III = \int dx + \int \frac{2}{x}\,dx + \int \frac{1}{x^2}\,dx$$

como todas estas integrales figuran en la tabla de primiti vas se tiene, expresando las respectivas constantes en una única:

$$\text{III} = x + 2 \cdot \lg x + \frac{1}{x} + C$$

METODOS DE INTEGRACION

141.- POR SUSTITUCION

La idea del método de sustitución es la de expresar la función a integrar en términos de una nueva variable, a fin de simplificar la expresión de la misma; llevándola siempre a una de las de la tabla de primitivas.

EJEMPLO:

1.- Consideremos el problema de resolver la siguiente integral

$$A = \int \cos 2x \, dx$$

En este caso la variable de integración es x, mientras que el argumento de la función coseno es $2x$. No se podrá entonces aplicar directamente la tabla de primitivas, siendo necesario emplear la siguiente sustitución:

$$2x = t$$

será necesario, a fin de poder efectuar la integración en esta nueva variable t, dar una expresión de la diferencial de la variable x en términos de t. Derivando ambos miembros respecto a la variable t se tiene:

$$2 \frac{dx}{dt} = 1$$

de donde:

$$dx = \frac{dt}{2}$$

se tendrá entonces

$$A = \int \cos t \, \frac{dt}{2} = \frac{1}{2} \int \cos t \, dt$$

como esta última integral figura en nuestra tabla de primitivas podemos escribir:

$$A = \frac{1}{2} \cdot \operatorname{sen} t + C$$

expresando este resultado en términos de la variable x se tendrá:

$$A = \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2x + C$$

2.- Resolver por sustitución la siguiente integral indefinida:

$$B = \int \frac{\operatorname{sen} 1/3\, x}{1 + \cos 1/3\, x} \, dx$$

haciendo: $$1 + \cos \frac{1}{3} x = t$$

se tiene, derivando ambos miembros respecto a la variable t :

$$- \operatorname{sen} \frac{1}{3} x \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{dx}{dt} = 1$$

de donde:

$$dx = \frac{3 \, dt}{-\operatorname{sen} \frac{1}{3} x}$$

expresada en términos de la variable t , la integral anterior resulta:

$$B = \int \frac{-3}{t} \, dt = -3 \lg t + C$$

expresando este resultado en términos de la variable x, se tendrá:

$$B = -3 \lg \left(1 + \cos \frac{1}{3} x\right) + C$$

Cuando se deba resolver, aplicando métodos de sustitución, una integral definida, se deberá tener en cuenta que la expresión de los extremos de integración puede haber variado, por lo tanto se deberá considerar en cada caso, los valores extremos correspondientes a la nueva variable.

EJEMPLO:

3.- Consideremos el problema de resolver la siguiente integral definida:

$$C = \int_0^2 \frac{3\ x^2}{2\ x^3 + 3}\ dx = 3 \int_0^2 \frac{x^2}{2\ x^3 + 3}\ dx$$

efectuando el siguiente cambio de variable

$$2\ x^3 + 3 = t$$

resulta, derivando ambos miembros respecto a la variable t:

$$2 .\ 3 \cdot x^2 \cdot \frac{dx}{dt} = 1$$

de donde: $$dx = \frac{dt}{6\ x^2}$$

la sustitución empleada, nos conduce a la siguiente tabla de valores, que permite expresar los extremos de integración en términos de valores de la variable t .

x	t
0	3
2	19

Efectuando los cambios indicados se tendrá:

$$C = \frac{3}{6} \cdot \int_{3}^{19} \frac{dt}{t} = \tfrac{1}{2} \lg t \Big|_{3}^{19} = \tfrac{1}{2} (\lg 19 - \lg 3)$$

$$= \tfrac{1}{2} \lg \left(\frac{19}{3} \right) = \tfrac{1}{2} \lg 6.3$$

$$= \tfrac{1}{2} \log 6.33 \cdot \lg 10 = 0.80161 \cdot 2.302585$$

$$C = 1.8458$$

resultado de la integral propuesta.

METODOS DE INTEGRACION

142.- POR PARTES

Teóricamente, el método de integración por partes permite sustituir el cálculo de una integral dada, por otra más simple para llegar así, luego de reiteradas aplicaciónes del método, a la integral de una función elemental cuya primitiva se conoce.

La regla de derivación de un producto de dos funciones de una misma variable permite escribir, siendo u y v, funciones de la variable x :

$$D(u \cdot v) = u' \cdot v + v' \cdot u$$

multiplicando ambos miembros por dx e integrando se tiene:

$$\int D(u \cdot v)\, dx = \int u' \cdot v\, dx + \int v' \cdot u\, dx$$

Recordando que siendo $DF(x) = f(x)$

se tiene: $\int f(x)\, dx = \int DF(x)\, dx = F(x)$

se podrá escribir en virtud de la cancelación operante sobre las operaciones simultáneas de integración y derivación:

$$u \cdot v = \int u' \cdot v \, dx - \int v' \cdot u \, dx$$

resultado éste que puede expresarse:

$$\int u' \cdot v \, dx = u \cdot v - \int u \cdot v' \, dx$$

y que dice: <u>la integral de una producto de dos funciones de una misma variable independiente, es igual a la integral de una de ellas por la otra, menos la integral de la integral hallada por la derivada de la otra</u>. Este resultado justifica la aplicación del método de integración por partes.

<u>EJEMPLO</u>

1.- Resolvamos aplicando el método de integración por partes, la siguiente integral indefinida:

$$I = x \int . \lg x \, dx$$

como en este caso conocemos la integral (primitiva) de la función $y = x$, siendo ésta $\frac{x^2}{2}$, se tendrá:

$$I = \frac{x^2}{2} \cdot \lg x - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} \, dx$$

$$= \frac{x^2}{2} \lg x - \int \frac{1}{2} x \, dx$$

siendo el valor de esta última integral $\frac{x^2}{2}$, se tendrá:

$$I = \frac{1}{2} x^2 \lg x - \frac{1}{4} x^2 + C$$

$$I = \frac{1}{2} x^2 \left(\lg x - \frac{1}{2}\right) + C$$

2.- Resolvamos integrando por partes la siguiente integral indefinida.

$$II = \int lg\ x\ dx$$

Como aparentemente en el integrando figura una sola función de la variable x, transformamos la anterior, incorporando dentro de la integral como factor: $x^0 = 1$.

Se tendrá así:

$$II = \int x^0\ lg\ x\ dx$$

conociendo la integral de la función x^0, procedemos a integrar por partes como en el ejemplo anterior:

$$II = x\ lg\ x - \int x\ \frac{1}{x}\ dx = x\ lg\ x - \int dx$$

siendo x el valor de esta última integral, resulta:

$$II = x\ .\ lg\ x - x + C$$

$$II = x\ .\ (lg\ x - 1) + C$$

3.- Resolvamos, integrando por partes, la siguiente integral indefinida:

$$III = \int sen^2\ x\ dx$$

descomponiendo $sen^2\ x = sen\ x\ .\ sen\ x$ se tiene:

$$III = \int sen\ x\ .\ sen\ x\ dx$$

integrando por partes se tendrá:

$$III = - \cos x \cdot \operatorname{sen} x + \int \cos x \cdot \cos x \, dx$$

$$= - \cos x \cdot \operatorname{sen} x + \int \cos^2 x \, dx$$

en lugar de proceder a integrar por partes esta última integral, apoyándonos en la igualdad $\cos^2 x = (1 - \operatorname{sen}^2 x)$, descomponemos la misma resultando:

$$III = - \cos x \cdot \operatorname{sen} x + \int (1 - \operatorname{sen}^2 x) \, dx$$

$$= - \cos x \cdot \operatorname{sen} x + \int dx - \int \operatorname{sen}^2 x \, dx$$

$$= - \cos x \cdot \operatorname{sen} x + x - \int \operatorname{sen}^2 x \, dx$$

observemos que la integral del segundo miembro, es igual al primer miembro con el signo contrario; en consecuencia pasando la misma al primer miembro se tendrá:

$$2 \int \operatorname{sen}^2 x \, dx = -\cos x \operatorname{sen} x + x + C$$

resultará así:

$$III = \int \operatorname{sen}^2 x \, dx = \frac{-\cos x \cdot \operatorname{sen} x + x}{2} + C$$

4.- Resolvamos, integrando por partes la siguiente integral indefinida:

$$IV = \int x^2 \operatorname{sen} x \, dx$$

En este caso conocemos la primitiva de las dos funciones que componen el integrando. Para decidir cual habrá de ser la primitiva que intervendrá como tal en el método de integración por partes, deberemos considerar la integral a que da origen la aplicación del método. Lo que generalmente se busca en la misma es que sea más simple que la integral inicial. Esto se logrará en este caso, comenzando a operar con la primitiva de la función x^2. Aplicando reiterandamente el método de integración por partes se llegará a una integral en donde figura solamente una cierta derivada de la función seno. En efecto:

$$IV = -\cos x \quad x^2 + \int \cos x \quad 2x . dx$$

aplicando a esta última integral el método de integración por partes, se tiene:

$$\int \cos x . 2x . dx = 2 \int x \cos x \, dx$$

$$= 2 \left[\operatorname{sen} x . x - \int \operatorname{sen} x \, dx \right] = 2.x.\operatorname{sen} x - 2 \cos x + C$$

poniendo este resultado en la fórmula del párrafo anterior resulta:

$$IV = -x^2 . \cos x + 2 x \operatorname{sen} x - 2 \cos x + C$$

METODOS DE INTEGRACION:

143.- INTEGRACION DE FUNCIONES RACIONALES ENTERAS

Consideremos la siguiente integral:

$$I = \frac{p(x)}{P(x)} dx$$

en donde p(x) y P(x) son polinomios de la variable x.

Supondremos, y siempre se podrá llegar a este caso, que el grado del polinomio del denominador supera al grado del polinomio del numerador. El método le integración de una función racional se basa en la descomposición de la franción $P(x) \div P(x)$ en suma de fracciones del tipo $A/(x - \alpha)$, en donde α es una raíz del polinomio del denominador, y A una constante conveniente.

Consideremos un primer caso en que el polinomio del denominador admita raices reales y distintas, a la luz del siguiente ejemplo:

$$I = \int \frac{6\,x^2 + 35\,x + 50}{(x-2)(x-3)(x-4)}\,dx$$

Observamos en este caso que el polinomio numerador es de segundo grado, y que el polinomio denominador es de tercer grado, estando este último escrito en su forma factorial, que nos muestra las raíces del mismo.

Para descomponer la función racional en suma de fracciones simples se hace:

$$\frac{6\,x^2 - 35\,x + 50}{(x-2)(x-3)(x-\ )} = \frac{A}{(x-2)} + \frac{B}{(x-3)} + \frac{C}{(x-4)}$$

Pasando al segundo miembro el polinomio denominador se tendrá, luego de una primera simplificación

$$6\,x^2 - 35\,x\quad 50 = A(x-3)(x-4) + B(x-2)(x-4) + C(x-2)(x-3)$$

Como en ambos miembros de esta expresión se tiene un polinomio de segundo grado, determinaremos los valores de los coeficientes A, B y C en forma tal que ambos polinomios tengan iguales, los coeficientes de los términos homólogos.

Ordenando el polinomio del segundo miembro resulta:

$$6\,x^2 - 35\,x - 50 = x^2(A + B + C) - x\,(7A + 6B + 5\,C) +$$

$$+ (12A + 12B + 6C)$$

se deberá cumplir entonces:

$$\begin{aligned} A + B + C &= 6 \\ 7\,A + 6\,B + 5\,C &= 35 \\ 12\,A + 12\,B + 6\,C &= 50 \end{aligned}$$

siendo la solución de este sistema: $A = 2;\ B = 1;\ C = 3$

Determinados así A , B y C se tendrá:

$$\frac{6\,x^2 - 35\,x + 50}{(x-2)\,(x-3)(x-4)} = \frac{2}{(x-2)} + \frac{1}{(x-3)} + \frac{3}{(x-4)}$$

De donde:

$$I = \int \frac{2\,dx}{(x-2)} + \int \frac{dx}{(x-3)} + \int \frac{3\quad dx}{(x-4)}$$

resultando finalmente

$$\begin{aligned} I &= 2\,\lg\,(x-2) + \lg\,(x-3) + 3\,\lg\,(x-4) + C \\ &= \lg\,(x-2)^2 + \lg\,(x-3) + \lg(x-4)^3 + \lg K \\ &= \lg\quad K\,.(x-2)^2.\,(x-3)\,.\,(x-4)^3 \end{aligned}$$

INTEGRACION DE FUNCIONES RACIONALES

144.- CASO EN QUE EL POLINOMIO DENOMINADOR ADMITA RAICES MULTIPLES

Consideremos este caso a la luz del siguiente ejemplo:

$$I = \int \frac{x^2 - 8\,x - 4}{(x - 3)^3}\,dx$$

en este caso se descompondrá la fracción de la siguiente manera:

$$\frac{x^2 + 8\,x + 4}{(x - 3)^3} = \frac{A}{(x-3)^3} + \frac{B}{(x-3)^2} + \frac{C}{(x-3}$$

Para determinar los valores de las constantes A, B, y C procederemos como en el caso anterior, resultando

$$x^2 + 8\,x + 4 = A + B\,(x-3) + C\,(x-3)^2$$

$$= x^2\,C + x\,(B-6C) + (A - 3B + 9C)$$

de donde, por identidad deberá cumplirse:

$$C = 1$$

$$B - 6\,C = 8$$

$$A - 3B + 9\,C = 4$$

sistema éste que me conduce a los siguientes valores: $A = 37$; $B = 14$; $C = 1$

Se tendrá entonces:

$$I = \int \frac{37\,dx}{(x-3)^3} + \int \frac{14\,dx}{(x-3)^2} + \int \frac{dx}{(x-3)}$$

lo que me conduce al siguiente resultado

$$I = \frac{-37}{2(x-3)^2} - \frac{14}{(x-3)} + \lg (x-3) + C$$

145.- METODOS DE INTEGRACION NUMERICA.

Hemos visto a través del teorema de Barrow que la integral definida:

$$A = \int_a^b f(x)\, dx$$

se calculaba, en el caso de conocerse la correspondiente integral indefinida, según:

$$A = \int_a^b f(x)\, dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

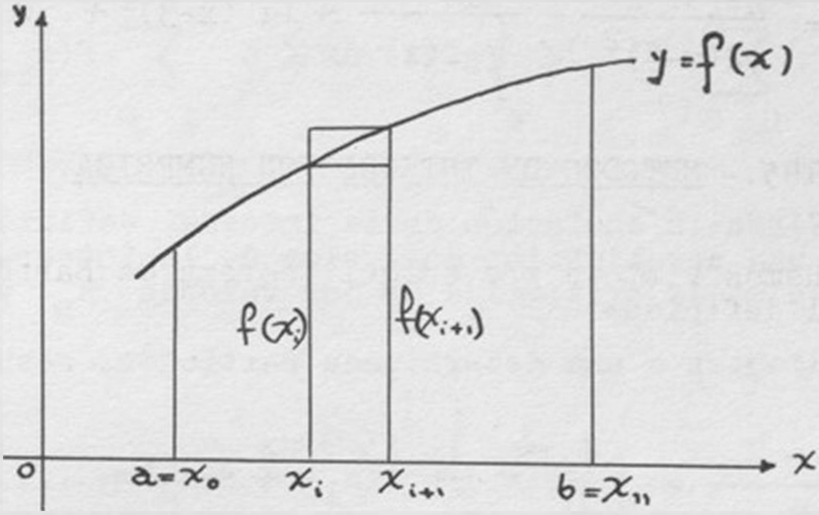
en donde F(x) era la función primitiva de f(x).

Cuando los métodos de búsqueda de la función primitiva no nos conduzcan a una solución del problema, nos vemos obligados, para resolver la integral definida, a apelar a métodos aproximados de integración numérica.

Supongamos querer determinar

$$S = \int_a^b f(x)\, dx$$

en donde $y = f(x)$ es por ejemplo una función monótona creciente en el intervalo a , b .



Si dividimos el intervalo a, b en n sub-intervalos, y levantamos las ordenadas de la función correspondientes a los puntos así determinados, se tendrá el area total comprendida entre el area de los rectángulos inscriptos y el area de los rectángulos circunscriptos a la curva de ecuación $y = f(x)$, correspondientes a la partición efectuada.

El area de un intervalo i-ésimo estará entonces comprendida entre las respectivas areas de los rectángulos inscriptos y circunscriptos, cumpliéndose:

$$s_i = (x_{i+1} - x_i)\, f(x_i) \leqslant \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\, dx \leqslant (x_{i+1} - x_i) f(x_{i+1}) = S_i$$

Sumando las areas correspondientes a los rectángulos inscriptos, por una parte, y a los rectángulos circunscriptos por otra, se tendrá:

$$s_n = \sum_{i\,0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) f(x_i) \leqslant \int_{x_0}^{x_n} f(x)\, dx \leqslant \sum_{i\,0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) f(x_{i+1}) = S_n$$

y siendo $x_o = a$, $x_n = b$, la anterior resulta:

$$s_n = h \sum_{i\ 0}^{n-1} f(x_i) \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant h \sum_{i\ 0}^{n-1} f(x_{i+1}) = S_n$$

Vista la acotación de la integral definida, se podrá dar una aproximación del valor de la integral a través de la media aritmética de los valores s_n y S_n correspondientes a una determinada partición, resultando:

$$A_n = \frac{s_n - S_n}{2} = \frac{h}{2}\left\{\left[f(x_o) + f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_{n-1})\right]\right.$$

$$\left. + \left[f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + \dots + f(x_n)\right]\right\}$$

De donde se tiene:

$$A_n = h \left\{ \frac{f(x_o) + f(x_n)}{2} + f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_{n-1}) \right\}$$

que geométricamente corresponde a la suma de las areas de los trapecios inscriptos.

La aproximación que se obtiene con esta fórmula, conocida bajo el nombre de fórmula de los trapecios, es bastante rudimentaria, aun para valores pequeños de h , por lo que presentaremos otro método más preciso.

146.- <u>METODO DE SIMPSON PARA LA INTEGRACION NUMERICA</u> .

Supongamos querer conocer el area comprendida entre la curva correspondiente a una parábola de segundo grado, el eje de las x y dos valores de la variable a los que designaremos según $-h$ y h.

Se tendrá así:

$$A = \int_{-h}^{h} (a_o + a_1 x + a_2 x^2)\, dx$$

$$= a_o x + a_1 \frac{x^2}{2} + a_2 \frac{x^3}{3} \Bigg|_{-h}^{h}$$

$$= 2 a_o h + \frac{2}{3} \quad a_2 h^2)$$

resultado éste que es más conveniente expresar según:

$$A = \frac{h}{3} \quad (6 a_o + 2 a_2 h^2)$$

A fin de tener una expresión de esta área en términos de las ordenadas correspondientes a la parábola de segundo grado en los puntos extremos del intervalo $-h$, h , y en su punto medio; denotando: $-h = x_o$; $0 = x_1$;

$h = x_2$, resultará:

$$y_o = f(-h) = a_o - a_1 h + a_2 h^2$$

$$y_1 = f(0) = a_o$$

$$y_2 = f(h) = a_o + a_1 h + a_2 h^2$$

que permite expresar

$$a_o = y_1 \quad ; \quad 2 a_2 h^2 = y_o - 2 y_1 + y_2$$

poniendo estos resultados en la expresión de A resulta:

$$A = \frac{h}{3} (y_0 + 4 y_1 + y_2)$$

como expresión del area comprendida bajo una parábola de gundo grado y entre los extremos x_0 y x_2 .

Si desearamos calcular el area comprendida entre una curva de ecuación $y = f(x)$, el eje de las x , y dos valores de la variable a y b, se procederá, siguiendo el método de Simpson , de la siguiente manera:

Se divide el intervalo de integración en un número par de sub-intervalos de igual amplitud h , y se consideran los correspondientes valores de la función en los $n+1$ extremos así determinados.

Observemos los dos primeros subintervalos. Los puntos extremos de los mismos tienen por abscisas x_0, x_1, x_2 y en dichos puntos la función $y = f(x)$ asume los valores y_0 , y_1 , y_2.

Aproximemos a la función una parábola de segundo grado que pase por los puntos P_0 (x_0 , y_0) , $P_1(x_1\ y_1)$, $P_2(x_2 , y_2)$. Como el área bajo la parábola responde a la expresión vista, se tendrá para el primer par de intervalos,la siguiente aproximación del área encerrada bajo la curva correspondiente a la función, dada por el área encerrada bajo la parábola

$$\frac{h}{3} (y_0 + 4 y_1 + y_2)$$

Prosiguiendo con el tercer y cuarto intervalo, y asi hasta agotar el número de intervalos, se tendrán las correspondientes aproximaciones de las respectivas areas según:

$$\frac{h}{3} (y_2 + 4 y_3 + y_4)$$

$$\frac{h}{3}\ (y_4 + 4\ y_5 + y_6)$$

. . . .

$$\frac{h}{3}\ (y_{n-2} + 4\ y_{n-1} + y_n)$$

Sumando estas áreas; se tendrá:

$$S = \frac{h}{3}\ \left\{(y_0 + y_n) + 4\ (y_1 + y_3 + \cdots + y_{n-1}) + 2\ (y_2 + y_4 + \cdots + y_{n-2})\right\}$$

Fórmula que nos da una aproximación del valor de la integral definida A .

Consideremos el calculo de la siguiente integral definida

$$A = \int_0^1 \frac{1}{x+1}\, dx$$

Resolviendo la correspondiente integral indefinida se tendrá:

$$A = \int_0^1 \frac{1}{x+1}\, dx = \lg (x+1) \Big|_0^1 = \lg 2 - \lg 1 = \lg 2$$

$$A = \log 2 \ .\ \lg 10 = 0{,}301030 \times 2.302585$$

$$A = 0{,}693147$$

Este es el valor exacto de la integral. Si no conociéramos la función primitiva del integrando, no podríamos haber seguido este camino; por lo tanto para calcular A deberíamos seguir alguno de los métodos vistos para la integración numérica.

Aplicación de la fórmula de los trapecios

Dividiendo el intervalo de integración 0 , 1 , en por ej. 8 subintervalos, los extremos de los mismos y los correspondientes valores de la f(x) en dichos puntos serán los de la siguiente tabla:

x_i	$f(x_i)$
$x_0 = 0$	$y_0 = 1$
$x_1 = 0{,}125$	$y_1 = 0{,}889$
$x_2 = 0{,}25$	$y_2 = 0{,}8$
$x_3 = 0{,}375$	$y_3 = 0{,}727$
$x_4 = 0{,}525$	$y_4 = 0{,}667$
$x_5 = 0{,}625$	$y_5 = 0{,}615$
$x_6 = 0{,}75$	$y_6 = 0{,}571$
$x_7 = 0{,}875$	$y_7 = 0{,}533$
$x_8 = 1$	$y_8 = 0{,}5$

Aplicando a estos resultados la fórmula de los trapecios, se tiene:

$$A_8 = 0{,}125 \left\{ \frac{1 + 0{,}5}{2} + 0{,}889 + 0{,}8 + 0{,}727 + 0{,}667 + 0{,}615 + \right.$$

$$\left. + 0{,}571 + 0{,}533 \right\}$$

$$A_8 = 0{,}125 \ (\ 0{,}75 + 0{,}889 + 0{,}8 + 0{,}727 + 0{,}667 + 0{,}615 + 0{,}571 + 0{,}5$$

$$A_8 = 0{,}125 \cdot 5{,}552$$

$$A_8 = 0{,}694$$

Este es el valor de la aproximación correspondiente a la fórmula de los trapecios.

Veamos ahora, aprovechando la misma división, ya que el número de subintervalos es par, la aproximación que se logra aplicando la fórmula de SIMPSON.

$$S_8 = \frac{0{,}125}{2}\left\{(1 + 0{,}5) + 4(0{,}889 + 0{,}727 + 0{,}615 + 0{,}533 + 2\,(0{,}8 + 0{,}667 + 0{,}571)\right\}$$

$$= 0{,}0417\ (1{,}5 + 11{,}056 + 4{,}076)$$

$$= 0{,}0417 \cdot 16{,}632$$

$$S_8 = 0{,}6935$$

Se observa así, que la aproximación lograda por medio de la fórmula de Simpson, es más precisa, para un mismo número de divisiones, que la dada por la fórmula de los trapecios.