AMOS SABRAS G.

ARITMETICA RAZONADA

1er Curso Bachillerato

Ciud., Trujillo, 1951

Libertad Nuñez Santos

1er Teórico

Liceo Secundario

ARITMETICA RAZONADA

Santiago, 7 de octubre de 1955

LIBRO PUBLICADO PARA SERVIR DE

TEXTO A LOS ALUMNOS DE SEGUNDA ENSEÑANZA

ESCRITA POR

AMOS SABRAS GURREA

Doctor en Ciencias Exactas (Madrid)
Catedrático de Matemáticas de
la Universidad de Santo Domingo

PRIMERA EDICION

CIUDAD TRUJILLO
1951

PROLOGO

Ha llegado a la categoría de axioma en los pueblos civilizados, que ningún grado de enseñanza afecta tanto a su porvenir, como el consagrado a los estudios del Bachillerato. Y es porque en ellos, las juventudes, deben templar su espíritu, en las mas fundamentales lecciones del saber y experiencia de la humanidad, creando sus clases directoras. Este fin tan amplio, lleno de nobles ambiciones, ha dificultado en todos los tiempos y en todos los pueblos, la articulación del sistema ideal, que lo realizare. De aquí, los tanteos, de aquí los cambios en sus planes, cada día mas complicados de redactar por el extraordinario número de nuevos temas, que el progreso ha acumulado, y que reclaman un lugar preferente en nuestra atención.

La Secretaría de Estado de Educación y Bellas Artes ha sentido el deber de romper con un estado de inercia en ésta vital cuestión, mal compaginado, con el espíritu de renovación que a toda la vida Dominicana le viene imprimiendo su Providencial Conductor Generalísimo Doctor Rafael Leonidas Trujillo Molina. De ello ha surgido el nuevo plan, que en el sector matemático aspira a obtener todos los beneficios de un aspecto de los mismos, de aquel, que constituye la diaria gimnasia mental que el razonamiento de sus verdades exije.

Por eso, su primer año, funde en un curso bajo un mismo profesor, las ramas Aritmética Razonada y Geometría Plana con una docencia de 5 horas semanales. Si en otros tiempos, figuraban separadas estas doctrinas que tienen un tronco común y cuyas raices se entrelazan, no pudiendo en ocasiones precisar, cual nutre una rama y cual otra, hoy, todo aconseja, el que se estudien unidas para que en el mínimo tiempo, se consigan los máximos resultados en el fortalecimiento mental y matemático del alumno.

En la activación de la diaria tarea pedagógica, son esenciales los ejercicios y problemas que el profesor selecciona con prudente tacto, no perdiendo de vista, el que si bien es cierto, que la teoría sin práctica es utopía, la práctica sin teoría, es rutina. Nada aconseja el hacer de un texto que debe ser herramienta insustituíble en nuestro trabajo, un instrumento pesado, por contener acopio innecesario de ejercicios que en su propia analogía, encuentran la mejor excusa para evitar su indefinida repetición.

Observará el lector en este texto, la omisión de lecciones que han tenido que sacrificarse en aras de la simplificación que impone toda conjugación de disciplinas en un curso. Aún así, para el aplicado, queda una tarea interesante que solo la vencerá sin agobio, si logra interesarse por estos estudios tan importantes como útiles, haciendo suya la máxima del genial Henri Poincaré "Las matemáticas por el amor a las matemáticas".

EL AUTOR

Ciudad Trujillo, 21 de Enero de 1951.

A R I T M E T I C A

I N T R O D U C C I O N

CONJUNTO Y NUMERO

1. UNIDAD Y PLURALIDAD.- Desde niños sabemos distinguir entre un objeto y varios objetos que con independencia de la naturaleza de éstos nos dan las ideas de unidad y pluralidad.

2. CONJUNTOS. Varios objetos considerados a la vez o sea simultáneamente, forman lo que llamamos un conjunto de objetos y tambien colección o grupo, llamándose cada objeto que lo compone elemento del conjunto.

3. NUMERO.- De la idea de conjunto de objetos resulta la idea de número; a un niño al que por ejemplo se le pregunta: cuántos libros llevas en la cartera; cuántos objetos contiene ese estucho ? Lo primero que hace es considerar el conjunto de libros que lleva en el primer caso o de objetos del estucho en el segundo, efectuando mentalmente la operación que designamos con el verbo contar; resultado de ésta sencilla operación es el número con que se satisface la pregunta hecha : he aquí cómo de la idea de conjunto ha nacido la de número, que el niño sabe perfectamente que lo obtiene con independencia del órden en que cuenta los objetos y de la naturaleza de los mismos, lo que le indica que un mismo número puede corresponder a dos conjuntos de objetos diferentes.

Número es la idea resultado de la operación de contar que determina una pluralidad o conjunto.-

4. <u>DIVISION DE LOS CONJUNTOS.- Todos los conjuntos de objetos los podemos considerar ordenados, de modo que a cada elemento siga otro, excepto el primero, al cual no precede ninguno y el último al que no le sigue otro; a esta clase de conjuntos se llaman conjuntos finitos</u>.

<u>Cuando los conjuntos carecen del último elemento, porque la formación sucesiva de éstos obedece a una ley, los conjuntos se llaman infinitos</u>.

5. <u>NOTACION DE LOS CONJUNTOS</u>.- Los elementos de los conjuntos los designaremos con letras mayúsculas y los números por letras minúsculas; unas y otras se usan también acentuadas así ; A', A'', etc.; que se lee <u>a</u> prima, <u>a</u> segunda etc.

6. <u>IGUALDAD Y DESIGUALDAD</u>.- <u>Si un maestro considera el conjunto de alumnos premiados y el de diplomas que tiene destinados para premios</u>, podrá suceder : I. Que recibiendo cada alumno un diploma se agote el conjunto de éstos. II. Que queden diplomas después del reparto; y III. Que falten diplomas en el primer caso diremos que los <u>números</u> de objetos de los dos conjuntos, diplomas por una parte y alumnos premiados por otra, son <u>iguales</u>, y en los dos siguientes desiguales, siendo en el segundo mayor el número de diplomas que el de alumnos y menor en el tercero.

La relación de igualdad entre dos números se expresa por el signo = que se lee <u>igual a</u>, y la desigualdad por los signos > y < que se leen respectivamente <u>mayor que</u> y <u>menor que</u>. Si representamos por <u>a</u> el número de alumnos y por <u>b</u> al de diplomas, expresaremos los tres casos así :

$$\begin{array}{rl} \text{I} & a = b \\ \text{II} & a < b \\ \text{III} & a > b \end{array}$$

El número <u>a</u> que antecede a los signos de igualdad y desigualdad se llama <u>primer miembro</u> y el número <u>b</u> que sigue a esos mismos signos se llama <u>segundo miembro</u>.

Dos conjuntos como los considerados en el primer caso, tales que a cada elemento del conjunto niños podemos hacer corresponder uno del conjunto diplomas, se dicen que son coordinables y en los otros dos casos que no son coordinables.

Los números que nos determinan los objetos de conjuntos coordinables son iguales y los que determinan los objetos de conjuntos no coordinables Desiguales.-

7. SERIE NATURAL.- Un conjunto puede contener un objeto y el número que lo determina se expresa por la palabra uno; si a este conjunto se le agrega otro objeto, obtenemos un nuevo conjunto determinado por el número que llamamos dos, y si así continuamos agregando de uno en uno otros objetos, los nuevos conjuntos que se van obteniendo se expresan por los números tres, cuatro etc. La operación de agregar un objeto a un conjunto para obtener el siguiente es indefinida y los números que les corresponden constituyen la llamada serie de los números naturales que vemos es infinita. Todo número de la serie natural es mayor que el que precede y menor que el que le sigue.

8. NUMERO ORDINAL.- Los alumnos matriculados en una asignatura son inscritos en la lista que le facilitan al profesor para que distinga a unos de otros. Es indudable que el profesor se evita frecuentemente equivocaciones por tener iguales apellidos algunos alumnos, asignándole a cada discípulo el número tres o número quince. En este caso, determina el número a un sólo elemento del conjunto alumnos. En este número se denomina ordinal.

El elemento que se le asigna el número uno se llama primero y se expresa gráficamente por 1º; al representado por el número dos se llama segundo y se escribe 2º; a los que corresponden 3, 4, 5, etc.; tercero, cuarto, quinto, etc. y se designan por 3º., 4º., 5º., etc., Corrientemente se usan indistintamente. Así se dice, el alumno número ocho o alumno octavo, etc.

9. ARITMETICA.- Es la ciencia que estudia las propiedades de los números.- El número es esencialmente abstracto, pero

teniendo su origen en la operación de contar conjuntos de objetos, cuando se designa la naturaleza de éstos, se llama número concreto.

10. NUMERO NATURAL : SU REPRESENTACION GEOMETRICA.- La unidad concreta con la que suponemos formados todos los conjuntos que dan lugar a la idea de número natural, puede ser un segmento de recta y aún podemos suponer cuando no lo sea, que está representado por éste; entonces tendremos un medio de representar los números naturales, por segmentos rectilíneos, tomados en una recta indefinida a partir de un punto. Así (fig. 1) :

O A B C D E F G H J K L M N

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13

La serie natural de los números 0, 1, 2, 3, 4, 5, ...n... aparecerá representada por los segmentos O, OA, OB, OC, OD, OE OF,......ON ......y recíprocamente. Se ve que los números guardan la misma relación de magnitud que los segmentos correspondientes; así, OC < OH y 3 < 8. Tambien se vé, que a cada punto O, A, B, ...corresponde un número natural que determina su posición. Más adelante observaremos que à los otros puntos intermedios corresponden otras clases de números que se llaman racionales é irracionales.

11. NOMENCLATURA DE ALGUNAS PROPOSICIONES MATEMATICAS. Las verdades aritméticas, unas se pueden demostrar y otras no. Las primeras reciben el nombre de TEOREMAS y las segundas el de AXIOMAS o POSTULADOS.

TEOREMA es una verdad demostrable. Distinguimos en él, el enunciado y la demostración. Enunciado es la expresión de la verdad que trata de demostrarse; consta de dos partes: hipótesis y tesis; la primera se supone cierta y la segunda se ha de demostrar. La demostración es el razonamiento que se hace para probar la tesis.

COROLARIO es una consecuencia que se deduce de un teorema. Por PROBLEMA entendemos toda cuestión en la que por medio de unos números conocidos (datos), que están relacionados con otros desconocidos (incógnitas), podemos averiguar éstos valores.-

L I B R O - I

LA NUMERACION

Y LAS OPERACIONES FUNDAMENTALES

---oOo---

C A P I T U L O I

Numeración Decimal

12. SU OBJETO.- La serie natural de los números es indefinida y por tanto es imposible asignarles signos orales y gráficos diferentes; de aquí la necesidad de un medio convencional y sistemático.

La numeración es el artificio de que nos valemos para expresar oral y gráficamente los números con un reducido número de palabras y un determinado número de signos que se llaman cifras.

La numeración se divide, pues, en dos partes : numeración hablada y numeración escrita. Artificios o sistemas de numeración muy diferentes son el romano y el decimal; expondremos ahora los principios fundamentales del decimal, que es el sistema adoptado por todos.

13. NUMERACION HABLADA.- La numeración hablada es el método que enseña a nombrar los números con pocas palabras.

Por este método tan admirable por su sencillez aprendemos a dar nombre a cada idea-número y al mismo tiempo ese nombre nos permite conocer su lugar en la serie natural.

Los diez primeros números de la serie natural han recibido los siguientes nombres independientes de toda regla: uno, dos tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho, nueve y diez.

Si un niño no conociese más que los nombres de estos números, vamos a ver cómo podría nombrar el número de elementos de un conjunto cualquiera, por ejemplo, de libros; si su número no es superior a diez, ya tiene resuelta la cuestión; en caso con trario, puede formar con los libros conjuntos de a diez, asignando a este conjunto un nombre, el de serie, por ejemplo; al formar la última serie, o no quedan libros en el conjunto dado, o lo que es más general, quedan en número inferior a diez que sabemos expresar; si son cuatro los libros sobrantes de formar las series y éstas suponemos que son siete, el niño nos dirá que el conjunto considerado contiene siete series y cuatro libros; mas si el número de series es superior a diez, podrá operar con las series de la misma manera que operó con los libros y por consiguiente formará nuevos conjuntos de a diez series que puede a cada uno asignarle un estante, y por este nombre expresarlo; como le sucedió con los libros, al formar el último estante o no le quedan series, o lo que es más general, le quedan, pero en número inferior a diez; si éstas son ocho y el de estantes cinco, dirá que, cinco estantes, ocho series y cuatro libros, es el número de libros del conjunto considerado; si el número de estantes fuera superior a diez, haría con los estantes grupos de a diez, que designaría con un nuevo nombre, así sucesivamente.

Por lo que antecede, vemos que el conjunto de elementos libros lo considera compuesto de otros conjuntos ideados por él, a los que les asigna nombres particulares (series, estantes) y que considera para la operación contar como nuevas unidades; estas nuevas unidades se llaman unidades colectivas o de diferentes órdenes.

La formación de las unidades colectivas constituye, pues, el fundamento de la numeración hablada.

Los números de las unidades de diferentes órdenes que corresponden a un conjunto, es por la manera sistemática de formarlas que hemos explicado, siempre inferior a diez; por consiguiente, conociendo los nombres de estas unidades colectivas y los de los nueve primeros números, podremos enunciar los elementos de cualquier conjunto.

El número diez es la base del sistema empleado para la formación de las unidades colectivas, por lo que este sistema se llama decimal; lo mismo que el diez, hemos podido elegir para la base de las unidades colectivas otro número, excepto el uno, dando con ello lugar a otros sistemas.

14. UNIDADES DE DIFERENTES ORDENES.- En el sistema de nume

ración decimal, las unidades colectivas han recibido los siguientes nombres :

decena	conjunto de diez elementos
centena	conjunto de diez decenas
unidad de millar	conjunto de diez centenas

... ...

Un elemento recibe el nombre de unidad simple o de primer - orden; una decena recibe el nombre de unidad de segundo orden una centena, unidad de tercer orden, etc. Como ya habíamos dicho, cada unidad de un orden se compone de diez del orden inmediato inferior.

En general se llama BASE de un sistema de numeración, el número de unidades de un orden, necesario para formar una del orden inmediato superior.

15. REGLA.- Para nombrar un número cualquiera se comienza - por la expresión del número de las unidades de orden más elevado que contenga; después se expresa el número de las unidades del orden siguiente, y así se continúa hasta expresar el número de las unidades de orden inferior.

Como hemos visto, para la expresión de las unidades de diferente orden que contiene, basta conocer sus nombres y la expresión oral de los nueve primeros números; si el número careciera de unidades de algún orden, no se enunciarán.

En la práctica, la palabra decena se sustituye por diez; la palabra centena por ciento o cien; la palabra millar por mil; en cuanto a los números, desde diez en adelante presentan las siguientes irregularidades: en vez de diez y uno, diez y dos.. ... diez y cinco, se dice, once, doce, trece, catorce, quince; en lugar de dos decenas o dos dieces de tres decenas.... nueve decenas, se dice, veinte, treinta... noventa; en lugar de cinco centenas o cinco cientos, se dice, quinientos; el número de libros que enunciábamos: cinco estantes, ocho series y cuatro libros, lo expresaremos así: quinientos ochenta y cuatro.

16. Los órdenes de unidades se clasifican en clases, conteniendo cada clase tres órdenes; estas clases son: primera clase, la de las unidades simples; segunda clase, de los millares;

tercera clase, de los millones; cuarta clase, de los millares de millón; quinta clase, de los billones, etc., al primer orden de cada clase se llama unidad, al segundo decena y al tercero centena de la clase correspondiente, así :

Primera clase; de las unidades siemples.	Unidades simples....	1er. orden
	decenas	2º orden
	centenas	3er. orden
Segunda clase; de los millares.	unidades de millar..	4º orden
	decenas de millar...	5º orden
	centenas de millar..	6º orden
Tercera clase; de los millones.	unidad de millón	7º orden
	decena de millón	8º orden
	centena de millón ...	9º orden
Cuarta clase; de los millares de millón	Unidad de millar de millón	10º orden
	Decena de millar de millón	11º orden
	Centena de millar de millón	12º orden
Quinta clase; de los billones.	Unidad de billón...	13º orden
	decena de billón...	14º orden
	centena de billón..	15º orden
Etc.		

17. NUMERACION ESCRITA. En lugar de escribir los números como venimbs haciéndolo, escribiendo las palabras con las que se designan, se ha ideado un método sencillo de escritura de los números mediante los signos llamados cifras o guarismos; estas cifras en el sistema decimal son diez :

uno,	dos,	tres,	cuatro,	cinco,	seis,	siete,	ocho,	nueve
1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,

que se llaman cifras significativas y 0, cifra no significativa, pero indispensable, como veremos.

18. La numeración escrita es el método que enseña a escribir todos los números con un determinado número de cifras.

Con las cifras que acabamos de indicar se pueden escribir todos los números, pues si suponemos que el papel sobre el que se va a escribir un número lo tenemos dividido en columnas y estas columnas se encabezan de izquierda a derecha con los nombres de las unidades de los diferentes órdenes, como aquí indicamos; tendremos, que enunciado un número, por ejemplo el tres mil cuatrocientos veinte y siete,

4 orden	3er. orden	2 orden	1er. orden
Unidad de millar	Centenas	Decenas	Unidades
3	4	2	7

que vemos se compone de 7 unidades simples, 2 decenas, 4 centenas y 3 unidades de millar, escribiremos un 3 en la columna de las unidades de millar, un 4 en la de las centenas, un 2 en la de las decenas y un 7 en la de las unidades; si suprimimos los trazos que forman las columnas, no por eso dejaremos de conocer el orden correspondiente a cada una de las cifras, que era el único objeto de aquellas columnas, siempre que convengamos en que la primera cifra de la derecha, representa unidades simples, la que antecede las decenas, la anterior centenas y la primera de la izquierda millares; quedará, pues, perfectamente escrito el número del modo siguiente : 3427.

Escrito un número, el orden decimal representado por una cifra y el número de orden que indica su lugar, contando de derecha a izquierda, se corresponden.

19. PRINCIPIO FUNDAMENTAL.- Toda cifra escrita a la izquierda de otra representa unidades de orden inmediato superior y la primera de la derecha, la de las unidades simples.-

Si un número enunciado careciera de unidades de un cierto orden y se quisiera escribir, en la columna correspondiente a dicho orden no tendríamos que escribir nada, pero al hacer desaparecer los trazos de las columnas quedaría entre las cifras un claro que expresaría la no existencia de unidades de este orden; ahora bien, escribiéndose las cifras unas a continuación de otras, se ocupa ese claro escribiendo en su lugar el signo 0; así :

quinientos cuatro, se escribirá : 504

De lo que antecede se deduce que una cifra correspondiente a un número escrito, tiene dos valores : uno absoluto y otro relativo; el primero expresado por el nombre de esta cifra y el segundo que depende del lugar en que aparece escrita en el número.

Así, en el número 444, todas las cifras tienen el mismo valor absoluto, pero es diferente su valor relativo, pues la cifra 4 de la derecha representa unidades simples, la segunda decenas y la tercera centenas.

20. REGLA PARA ESCRIBIR UN NUMERO ENUNCIADO.- Para escribir un número enunciado se procede de izquierda a derecha, comenzando por las unidades de orden más elevado, teniendo cuidado de que toda clase esté representada por un grupo de tres cifras, excepto la clase superior, que puede carecer de centenas o de centenas y decenas.- Así, para escribir el número treinta y siete millones, setenta y cinco mil unidades, se escribirá : 37 075 000.

Entre una clase y otra hemos dejado un pequeño espacio, que es preferible al empleo de signos, que pueden confundirse con otras notaciones aritméticas; si un número contiene millones, billones ..., etc., a la derecha y en la parte inferior de las cifras de las unidades de esta clase escribiremos con caracteres pequeños un 1, un 2 ...

21. REGLA PARA LEER UN NUMERO ESCRITO.- Para leer un número si tiene tres cifras a lo más, se leen sucesivamente comenzando por la izquierda, las centenas, decenas y unidades que contenga; así, 325, se leerá trescientos veinte y cinco-

Si el número tiene más de tres cifras, se divide en secciones de a tres, comenzando por la derecha, la última sección de la izquierda podrá tener solamente una o dos y se leen sucesivamente las secciones, expresando después de cada sección el nombre de la clase que representan.

Así, 7 523 324 se leerá siete millones, quinientos veinte y tres mil, trescientos veinte y cuatro unidades.

CAPITULO II

NUMERACION ROMANA.-

22. Todavía se emplean números escritos, conforme a este antiguo sistema, y tanto por esta razón como por el ingenio que demuestra, vamos a decir de él lo más esencial.

Los números se representan por letras, conforme a la siguiente correspondencia :

1	5	10	50	100	500	1000
I	V	X	L	C	D	M

REGLA.- 1ra. Toda letra escrita a la derecha de otra, agrega a ésta su valor.- En la aplicación de esta regla se debe tener presente que las letras V, L y D no se pueden repetir y que ninguna puede repetirse más de tres veces.

REGLA.- 2da. Toda letra escrita a la izquierda de otra de mayor valor, le resta el suyo. En la aplicación de esta regla se debe tener presente que las letras V, L y D no se deben colocar a la izquierda de otras de más valor que cada una de las otras tan sólo se colocará a la izquierda de las dos que le siguen en orden ascendente.

23. Teniendo presente las reglas anteriores, se escribirá - un número inferior a 3,000, escribiendo sucesivamente los números de sus diferentes órdenes.

Unidades = I, II, III, IV, V, VI, VII, VIII, IX.
Decenas = X, XX, XXX, XL, L, LX, LXX, LXXX, XC.
Centenas = C, CC, CCC, CD, D, DC, DCC, DCCC, CM.
Millares = M, MM, MMM.

Los números 46, 258 y 2625 se escribirán :

46 = XLVI, 258 = CCLVIII, 2625 = MMDCXXV.

24 REGLA.- Para leer un número escrito en la numeración romana, inferior a 3,000, se comienza por las unidades de orden superior y se continuará leyendo los órdenes sucesivos hasta terminarlo.

Así, MMCXVI se leerá dos mil ciento diez y seis.

25. REGLA.- Si un número es superior a 3.000, se escriben los millares como si fueran unidades simples y se coloca encima una raya; si es superior a 3.000.000 ó sea a 3.000 veces 1.000, se escribe el número de millones como si fuera de unidades simples y encima se colocan dos rayas; después se escribe el número de millares en la misma forma, pero escribiendo encima tan sólo una raya, y por último se escriben las unidades simples.

Así : 6 758 = $\overline{\mathrm{VI}}\mathrm{DCCLVIII}$

7 856 726 = $\overline{\overline{\mathrm{VII}}}\overline{\mathrm{DCCCLVI}}\mathrm{DCCXXVI}$.

26 REGLA.- Para leer un número superior a 3.000.000 se leen separadamente los números de los diferentes órdenes, teniendo presente las rayas horizontales escritas encima.

Así, $\overline{\overline{\mathrm{VIII}}}\overline{\mathrm{CD}}\mathrm{XLVII}$, se leerá :

Ocho millones, cuatrocientos mil cuarenta y siete.

EJERCICIOS SOBRE LOS CAPITULOS I y II

I Nombrar un número formado por siete millones, cuatro centenas de millar, cinco decenas de millar, dos centenas, seis unidades.-

II Escribir con cifras el número :

Setecientos mil millones cuatrocientos cinco millones dos mil veinte.-

III. Descomponer en unidades de diferentes órdenes y expresar cuántas de cada una contiene el número

3 045 502 301

IV. Qué modificación experimenta el número del ejercicio anterior si se le agregan dos ceros a su derecha ?

V. Escribir en caracteres romanos el año actual.

VI. Idem el número 105,739.

VII. Leer los números MCDXCII y DCCXI.

VIII. Leer $\overline{\overline{\mathrm{MCCL}}\mathrm{X}}\mathrm{XXXXIV}$.

CAPITULO III

ADICION Y SUBSTRACCION

I. BREVES IDEAS SOBRE LAS OPERACIONES FUNDAMENTALES

27. Algunas operaciones que se efectúan en la naturaleza con los conjuntos, tienen su interpretación abstracta en la Aritmética, operando con los números que los representan.

Las operaciones que se efectúan en la Aritmética con los números se dividen en dos grupos : en el uno se incluyen las llamadas de cálculo y en el otro las coordinatorias.

28. Nosotros no nos ocuparemos más que de las primeras, que en general tienen por objeto hallar uno o varios números que se llaman resultados por medio de otros conocidos - que se llaman datos; estas operaciones pueden ser directas e inversas.

29. Las operaciones directas tienden a la reunión de varios números en uno; por esto se llaman operaciones de composición. Las inversas tienen en general por objeto hallar uno de los datos de la directa correspondiente, cuando se conoce el resultado y el otro dato.

30. En toda operación de cálculo, intervienen esencialmente tres números; dos llamados datos, que determinan mediante la operación el tercero, que es el resultado. Así, la adición determina la suma por medio de dos sumandos; la substracción determina la diferencia por medio del minuendo y substraendo; la multiplicación sirve para hallar el producto mediante el multiplicando y multiplicador; por medio de la división hallaremos el cociente, que corresponde al dividendo y divisor; la elevación a potencias determina la potencia cuando se conocen la base y el exponente y las operaciones inversas de ésta, llamadas radiación y logaritmación, tienen respectivamente por objeto hallar la base de una potencia cuando se conocen ésta y el exponente, y hallar

el exponente, cuando se conocen la potencia y la base.

El siguiente cuadro expresa sistemáticamente lo que dejamos dicho.

CLASE	OPERACIONES	DATOS	RESULTADO
Directa	Adición	$a + b$	s
Inversa	Substracción	$s - a$	b
Directa	Multiplicación	$a \times b$	p
Inversa	División	$p : a$	b
Directa	Elevación a potencias	a^b	p
Inversa	Radicación	$\sqrt[b]{p}$	a
Inversa	Logaritmación	$\log_a p$	b

31. Además de los signos empleados para distinguir las operaciones, se usa con frecuencia en la Aritmética el signo( ), paréntesis; dentro de él se escriben números combinados por operaciones y el paréntesis indica que el resultado ha de ser sometido a una operación nueva.

EJERCICIOS

I. Definir la operación substracición como inversa de la adición.

II Razonar la propiedad conmutativa de la adición.

III Definir la división como inversa de la multiplicación.

II. ADICION

Adición es una operación que tiene por objeto agregar a un número las unidades de otro.

Los números que se han de sumar se llaman sumandos y el resultado de la operación suma o total.

Se indica la operación colocando entre el primero y segundo el signo + que se lee más, y separándoles del resultado por medio del signo = .

Así : 4 + 5 = 9.

Es evidente que se hallará el resultado de la operación anterior, agregando al número 4, una a una, es decir, contándolas, las unidades del 5; este procedimiento, siempre largo y molesto, llega a ser impracticable cuando el referido sumando es un número grande. Cuando el segundo sumando es cero la suma es igual al primero. Así : 4 + 0 = 4.

33. ADICION DE NUMEROS DIGITOS. Se efectúa sabiendo de memoria la tabla de sumar, que es un cuadro de números, iguales a las sumas posibles de números dígitos.

Para formarla se escriben en una linea horizontal el 0 y los nueve primeros números; debajo de éstos se escriben ordenadamente los que resultan de agregarles una unidad y así se continúa escribiendo filas de números formados del mismo modo hasta escribir la que comienza con el 9.

Es evidente que la primera fila contiene las sumas de sus números con cero, la segunda contiene las sumas de sus números con 1; en general, una fila cualquiera contiene las sumas de los números de la primera fila con el número que encabeza aquélla.

NUMEROS COMPUESTOS.- Un número compuesto lo hemos considerado como el resultado de agregar sucesivamente a los números de sus diferentes órdenes de unidades, las que le siguen descendiendo. Así : 456 es el resultado de agregar a 400, 50 y 6; esta operación compuesta se indica del modo siguiente :

400 + 50 = 6

80
60

y se llama suma indicada de varios sumandos.

34. Las operaciones de cálculo aritmético tienen determinadas propiedades que son independientes del modo de operar y que facilitan reglas operatorias. Estas propiedades se llaman leyes formales de las operaciones. Así : la adición se dice -- que es una operación uniforme, conmutativa, asociativa y monótona.

I. Es uniforme : quiere esto decir que la suma miembro a miembro de dos igualdades es otra igualdad. Así de las igualdades $\begin{matrix} a = b \\ a' = b' \end{matrix}$ se deduce que $a + a' = b + b'$. Esta propiedad es evidente y se aplica a varias igualdades.

II. Es conmutativa; quiere esto decir que el orden de los sumandos no modifica el valor de la suma : Así, $a + b = b + a$, porque basta saber que $a = 1 + 1 + \ldots\ldots + 1$ (a veces) y $b = 1 + 1 + 1 + 1 + \ldots\ldots\ldots \times 1$ (b veces. Esta propiedad- se aplica a una suma de varios sumandos.
Así : $a + b + c + d = c + b + d + a$.

III. Es asociativa : quiere esto decir que dos o más sumandos pueden ser sustituidos por su suma efectuada, así :
$a + (b + c) + d = a + s + d$.- (El paréntesis indica que los sumandos b y c se han sustituido por su suma s. -
Esta propiedad es evidente si los sumandos que deseamos asociar son los primeros; pero como en virtud de la propiedad - conmutativa siempre puede hacerse que lo sean, esta propiedad es general.

IV. Inversamente, un sumando puede sustituirse por otros varios de los cuales él sea la suma.

V. Es monótona : Esta ley expresa que si varias desigualdades del mismo sentido se suman miembro a miembro, los resultados forman una desigualdad del mismo sentido que las propuestas. Así :

$7 > 3$
$5 > 2$ se obtiene $7 + 5 + 8 > 3 + 2 + 4.$
$8 > 4$

Corolario.- A los dos miembros de una desigualdad se les puede sumar un mismo número n, sin que el sentido de la desigualdad varíe.

35.- Módulo de la operación de sumar es el número que sumado con otro cualquiera no lo modifica. Así : $7 + 0 = 7$; luego 0 es el módulo de la adición.

36.- Puesto que, según hemos dicho, un número se puede considerar como una suma de varios sumandos, en la suma 456 + 28, se podrán sustituir esos números (propiedad IV) por las sumas $400 + 50 + 6$ el primero y por $20 + 8$ el segundo y se podrá escribir la siguiente igualdad :

$$456 + 28 = 400 + 50 + 6 + 20 + 8.$$

Por la propiedad III podremos reunir las 5 decenas con las 2 decenas del segundo miembro de la igualdad anterior y lo mismo podrá hacerse con las 8 unidades y 6 unidades, pudiendo, por tanto , escribirse :

$$400 + 50 + 6 + 20 + 8 = 400 + 70 + 14.$$

En virtud de las propiedades III y IV de las sumas indicadas, se podrán distribuir las 14 unidades en 1 decena y 4 unidades, y asociando esa decena a las 7 decenas del segundo sumando, se podrá finalmente escribir :

$$400 + 70 + 14 = 400 + 80 + 4$$

y como esta suma indicada es según los principios de la numeración escrita igual al número 484, habremos conseguido el objeto que nos proponíamos de reunir los números 456 y 28 en uno solo, que es el 484.

Como el razonamiento se extiende sin modificación alguna a la suma de variados sumandos, se podrá enunciar con carácter general la siguiente regla práctica :

REGLA.- Para sumar números de varias cifras, se escriben los sumandos unos debajo de otros, de modo que se correspondan las últimas cifras de la derecha (así se corresponderán unidades con unidades, decenas con decenas etcétera); haciendo uso de la regla anterior, se hallan las sumas de las cifras contenidas en cada columna, comenzando por la de las unidades; al pie de cada columna se escriben las unidades de su suma, reservando las decenas para agregarlas a la suma de la columna siguiente, y así se continúa hasta haber considerado todas las columnas.-

Comenzamos, como hemos visto, la adición por la columna de la derecha para poder agregar todas las unidades de un orden superior que se formen a las unidades del orden siguiente.

Al efectuar un cálculo aritmético es fácil cometer un error, por lo cual conviene asegurarse de la exactitud del resultado; o volviendo a efectuarlo, en cuyo caso nada más fácil que repetir el error, o efectuando una nueva operación que se llama prueba.

37.- Prueba de una operación es, pues, una nueva operación que efectuaremos para asegurarnos de la exactitud del resultado obtenido en la primera.

La prueba de la adición consiste en cambiar el orden de los sumandos y la suma que obtengamos debe ser igual a la primera suma hallada; si así sucede es muy probable que la operación esté bien hecha; por lo general la prueba la efectuamos sumando de abajo arriba si anteriormente sumamos de arriba abajo.-

III. LA SUBSTRACCION

38.- Si de un conjunto de 15 unidades, por ejemplo, separo 4, Cuántas quedan ? Esta pregunta se contesta mediante una operación numérica llamada substracción.

La cual tiene por objeto, averiguar las unidades que quedan en un conjunto, cuando de él, se separa un determinado número de ellas.

El número que expresa las unidades del conjunto dado se llama minuendo; el que expresa las unidades que se separan recibe el nombre de substraendo, y el que nos indica las que quedan se llama resto, exceso o diferencia.

39. NOTACION.- Se indica la operación escribiendo el minuendo, después el signo — que se lee menos, y a continuación el substraendo, separando el resultado de los datos por medio del signo igual. Así, en el ejemplo propuesto escribiríamos $15 - 4 = 11$.

De lo que hasta aquí hemos expuesto, se duduce que el substraendo es a lo más igual al minuendo.

40 También deducimos de una manera inmediata, que el minuendo es la suma del substraendo y el resto; para esto, concretándonos al ejemplo primero, supongamos que las 15 unidades (minuendo) fueran monedas y que de ellas separo 4 (sustraendo), quedarán 11 (resto); evidentemente si agrego a las 11 monedas que han quedado, las 4 que separé, obtendré las 15 primitivas.

En general, si por a designamos el minuendo, por b el sustraendo y por c el resto, se tendrá :

$$a - b = c \quad \text{de donde} \quad a = b + c$$

de aquí deducimos la siguiente definición de la substracción:

41. La substracción es una operación que tiene por objeto conocida una suma de dos sumandos (minuendo) y uno de ellos (substraendo), hallar el otro (resto).

La suma conocida a, es el minuendo, el sumando conocido b el substraendo y el desconocido c el resto o diferencia.

La substracción es por consiguiente, una operación inversa de la adición.

La adición no puede tener otra operación inversa porque el orden de los sumandos no altera la suma; es decir, que en la operación directa a y b desempeñan el mismo papel.

42.- La substracción tiene las siguientes propiedades o leyes formales: Es uniforme, monótona e invariante.

I. Uniforme : Son iguales o de una forma los resultados de restar miembro a miembro dos igualdades. Así : de

$$\begin{matrix} a = b \\ a' = b' \end{matrix} \quad \text{se deduce} \quad a - a' = b - b', \quad \text{pues si fuera}$$

$a - a' \gtrless b - b'$, la suma de estos restos con $a' = b'$ substraendos nos daría $a \gtrless b$ resultado absurdo.

Corolario.- De los dos miembros de una igualdad puede restarse el mismo número y de un mismo número pueden restarse los dos miembros de una igualdad; en ambos casos resulta otra igualdad.

II. Es monótona, o sea si de los dos miembros de una desigualdad se restan los de una igualdad, los resultados forman una desigualdad del mismo sentido que la dada. Así

$$\text{de} \quad \begin{matrix} a > b \\ a' = b' \end{matrix} \quad \text{se deduce} \quad a - a' > b - b', \text{ pues si } a - a' \leqq b - b'$$

sumando miembro a miembro ésta expresión con $a' = b'$ resultaría $a \leqq b$; resultado absurdo.. Demostraciones parecidas se aplican al restar miembro a miembro de una igualdad, una desigualdad y también al caso de restar miembro a miembro dos desigualdades de sentidos contrarios, en el cual resulta una desigualdad del mismo sentido que la minuendo.-

III. Invariante : Una diferencia no se modifica si al minuendo y al sustraendo se les suma o resta un mismo número.-

Sea $a - b = c$. Vamos a demostrar que si sumamos el número n al minuendo y substraendo, el resto no varía, por lo tanto que $(a + n) - (b + n) = c$. De $a - b = c$ se deduce $a = b + c$ y por la propiedad uniforme de la adición; $a + n = b + c + n$, y por la propiedad conmutativa y asociativa se tiene $a + n = (b + n) + c$, de donde $(a + n) - (b + n) = c$ como se desea probar.

En la adición hemos visto que $a + 0 = a$, de donde $a - a = 0$ y $a - 0 = a$; estas dos últimas igualdades nos dicen : la primera, que la diferencia de dos números iguales es igual a cero, y la segunda, que si se resta cero de cualquier número, el resultado es este número.

La diferencia de dos números puede ser un número menor o mayor que 10, es decir, un número de una o de varias cifras.

Se conocerá que la diferencia tiene una, en que agregando 10 unidades al substraendo, se forma un número mayor que el minuendo; si con esta operación se forma un número menor, la diferencia tendrá varias cifras. Así la diferencia 14 - 8 tendrá una cifra y la diferencia 126 — 14 tendrá varias.

43. CASOS DE SUBSTRACCION.- 1ro. Que el substraendo y el resto tengan una sola cifra. 2do. Que tengan ambos varias.

1er. CASO.- Sea, por ejemplo, 14 - 8; se trata de hallar un número que, sumado con 8, nos dé 14; la tabla de sumar empleada del modo siguiente resuelve la cuestión : Se busca el substraendo 8 en la primera fila, se baja por la columna correspondiente hasta el minuendo 14 y el número 6, que encabeza la fila en donde éste se encuentra, será el resto.

44.- 2do. CASO.- Sea, por ejemplo, 454 — 124, en el que las cifras del minuendo son por lo menos iguales que las del mismo orden del substraendo.

Es evidente que la diferencia se formará con las cifras 3, 3 y 0, que representan las diferencias parciales de los números de unidades del mismo orden del minuendo y substraendo.

La operación se dispone del modo siguiente :

$$\begin{array}{r} 454 \\ -124 \\ \hline 330 \end{array}$$

Si tuviésemos que restar de 628 el número 376, comenzaríamos aplicando el método anterior y restaríamos de 8 unidades del minuendo las 6 unidades del substraendo, resultando 2 unidades para la cifra del resto; pero al continuar del mismo mo do, encontraríamos con la imposibilidad de restar de dos decenas del minuendo las 7 decenas el substraendo; para salvar este inconveniente, agregaremos a las 2 decenas, 10 decenas,- y se formarán 12 decenas, de las que ya es posible restar las 7 decenas; pero tendremos que agregar estas mismas 10 decenas al substraendo, para que el resto no varíe, lo cual se consigue agregando 1 centena a las 3 centenas del substraendo y así hallaremos las centenas del resto, efectuando la substracción de 6 centenas y 4 centenas.

La operación se dispone del modo siguiente :

$$\begin{array}{r} 628 \\ -376 \\ \hline 252 \end{array}$$

y se efectúa diciendo : 8 — 6, 2; 12—7, 5 y 6—4, 2: la diferencia es, pues, 252.

REGLA. Se escribe el minuendo y debajo el substraendo teniendo cuidado de que se correspondan las unidades del mismo orden; comenzaremos la operación por la derecha; si es posible se resta cada cifra del substraendo de la correspondiente del minuendo y si alguna de estas substracciones no fuera posible por ser la cifra del substraendo mayor que la correspondiente del minuendo, se agregan 10 a la cifra del minuendo y 1 a la cifra inmediata colocada a la izquierda de la del substraendo.

45.- PRUEBA DE LA SUBSTRACCION.- La prueba de la substracción consiste en sumar el substraendo con el resto y esta suma tiene que ser igual al minuendo.

IV. PROPIEDADES DE LA ADICION Y SUBSTRACCION.

46. Hemos llamado suma indicada de varios sumandos a la expresión que indica que un número se ha de sumar con otro, y el resultado con otro, hasta llegar al último.

Si llamamos a los sumandos a, b, c y d, la suma indicada será : a + b + c + c; la diferencia indicada de los números a y b, se representa por a — b.

También podemos considerar expresiones más generales combinando los signos de sumar y restar, resultando de este modo

$$a - b + c - d + e - f$$

que se llama polinomio numérico.

47. Los datos de una operación pueden ser el resultado de una operación no efectuada, entonces se dice que esos datos se dan en forma implícita y no hay necesidad de conocer esos números explícitamente para efectuar la operación y aun en muchos casos de demostración de propiedades numéricas, es necesario conservarlas en aquella forma.

48. Distinguiremos varios casos : 1ro. Adición de sumas con números o viceversa; 2do. Adición de sumas entre sí; 3ro Adición de una diferencia con un número y viceversa; 4to. Adición de dos diferencias; 5to. Adición de un polinomio numérico con un número; 6to. Adición de dos polinomios numéricos; 7mo. Restar de un número una suma indicada; 8vo. Restar de un número una diferencia indicada.

1er. CASO.- Adición de una suma con un número.-
Basta para ello formar con la suma y el número una sola suma. Así : $(a+b+c+d)$ $m = a+b+c+d+m$ y si hacemos uso de la propiedad (Asociativa), podremos substituir b y m, por ejemplo, por su suma, llamándola s, la expresión anterior será $a+s+c+d$, lo cual nos dice que para sumar una suma indicada con un número o viceversa, basta agregar el número a uno cualquiera de los sumandos.

2do. Adición de sumas entre si.- Basta para efectuar esta operación formar con los sumandos de ambas sumas una sola.

Así : $(a+b+c) + (m+n) = a+b+c+m+n$.

En efecto : Si tenemos $a+b+c = s$, se podrá escribir : $(a+b+c) + (m+n) = s + (m+n)$,
y por tanto (primer caso),

$$s + (m+n) = s + m + n$$

y por consiguiente, propiedad (34-IV):

$$(a+b+c)+(m+n) = a+b+c+m+n.$$

3ro. Adición de una diferencia con un número y viceversa.- Para sumar una diferencia indicada con un número se puede agregar ese número al minuendo de la diferencia. También se puede efectuar la operación restando ese número del substraendo. Las dos reglas se expresan con las igualdades siguientes

$$(a-b)+m = (a+m)-b; \quad (1)$$
$$(a-b)+m = a-(b-m); \quad (2)$$

Para demostrar la igualdad (1), diremos :

$a - b = d$, de donde $a = b + d$, y de aquí (34-I) :

$a + m = b + m + d$; luego $(a+m) - b = d + m = (a-b) + m$

Con la misma facilidad se demuestra la (2).

4to. Adición de dos diferencias.- Se forma una diferencia cuyo minuendo sea la suma de los minuendos de las diferencias dadas y cuyo substraendo sea la suma de los substraendos de las mismas.

Así : $(a-b)+(m-n) = (a+m)-(b+n)$.

En efecto, si tenemos $(a-b) = d$, se podrá escribir :

$$(a-b)+(m-n) = d+(m-n) = (d+m)-n =$$

$$[(a-b)+m]-n = [(a+m)-b]-n = (a+m)-(b-n).$$

5to. y 6to. Adición de un polinomio numérico con un número y adición de dos polinomios numéricos. Un polinomio numérico es igual a la diferencia entre los números que deben sumarse y los que deben restarse.

Así : $a-b+c-d-e+f = (a+c+f)-(b+d+e)$.

De aquí se deduce que las operaciones con polinomios numéricos quedan reducidas a las ya estudiadas con diferencias.

7mo. Restar de un número una suma indicada.- Para ello se restan sucesivamente del número y de las diferencias que se van obteniendo, cada uno de los sumandos.

Así : $a - (b+c+d) = a-b-c-d$.

Esto es una consecuencia del concepto de polinomio numérico.

8vo. Restar de un número una diferencia indicada.- Para efectuar esta operación, se suma con el número el substraendo de la diferencia y del resultado se resta el minuendo.-

Así : $a - (b-c) = (a+c) - b$.

Estas diferencias son iguales, porque la segunda tiene por minuendo y substraendo, los de la primera, aumentados en un mismo número c.

EJERCICIOS

1. Se llama complemento aritmético de un número lo que le falta a este número para formar una unidad del orden inmediato superior al de sus unidades más elevadas.

Hallar el complemento aritmético de los números : 361, 2 359, 23 498.

2. Tres personas se dividen unos campos; la primera y la segunda reciben 1,835 tareas, la segunda y la tercera 2,306 tareas y la primera y tercera 2,199 tareas. Que extensión superficial le ha correspondido a cada uno ? (La unidad agraria del campesino Dominicano es la tarea y es equivalente a 628,$^{m^2}$885.).-

3. Demostrar que la suma de dos números aumentada en su diferencia es igual al doble del mayor y que esta suma disminuida en su diferencia es igual al doble del menor.

4. Si varios números están ordenados en sucesión creciente, la suma de las diferencias que se obtiene restando-

de cada uno al anterior, es igual a la diferencia entre el- último y el primero.

5. La población estimada en la República Dominicana en 1ro. de Enero de 1948 era de 1,107,273 varones y 1,074,836 hembras Cual era su total ?

6. Hallar dos números naturales consecutivos cuya suma sea 783.- Idem tres números naturales consecutivos que sumen 783.

7.-Encontrar dos números sabiendo que si al primero se le añaden 6 unidades resulta igual al segundo y si al segundo se le añaden tambien 6 unidades resulta doble que el primero.

8.- En 1940 la Provincia Duarte, La Vega, Monseñor Meriño,y Seibo, tuvieron cultivadas de arroz respectivamente las siguientes hectáreas : 7929; 8851; 8025; 6545. Cuál fué la extensión que correspondió a las cuatro ?

9.- La distancia de Ciudad Trujillo a New York es de 1,535 millas marinas (La milla marina, con menor error de 1 metro,equivale a 1,852 metros) y a Cadiz (España) 3,125. Hallar en que excede la distancia de Ciudad Trujillo a Cadiz a la distancia de Ciudad Trujillo a New York.

10. La República Dominicana el 1ro. de Enero de 1948, contaba con 2,182,109 habitantes; 172,561 habitaban en el Distrito de Santo Domingo y 287,646 en la Provincia de Santiago. Cuántos habitantes ocupaban el resto de la Isla ?.

11. En la zafra del 1937-38, ocupó la Republica Dominicana el cuarto lugar entre los Paises Americanos, productores de azucar de caña con 427,563 toneladas, después de Cuba con 2,887,700 toneladas, Brazil con 995,500 toneladas y Puerto Rico con 924,000 toneladas.- La producción mundial ascendió a 17,390,000 toneladas, correspondiendole a America 7,500,000 t. Hallar el resto que correspondió a los otros pueblos del mundo, con relación a éstos 4 Paises.- Igual problema con respecto a los otros pueblos de America.

CAPITULO IV

I. MULTIPLICACION.

49. La multiplicación es una operación, en la que se toma un número que se llama multiplicando, tantas veces por sumando, como unidades tiene otro que se llama multiplicador.

El resultado de esta operación se llama producto.

El multiplicando y el multiplicador reciben el nombre de factores del producto.

50. NOTACION.- Se indica esta operación por medio del signo X o por un . que se lee multiplicado por y que se coloca entre el multiplicando y el multiplicador. Así : 4 x 5 se lee : cuatro multiplicado por cinco.

51. OBSERVACION.- El producto se forma con el multiplicando, de la misma manera que el multiplicador se forma con la unidad.- Así, en el producto $20 = 5 \times 4$ sabemos por definición que 20 (producto) se forma tomando el 5 (multiplicando) 4 veces por sumando; es decir, las mismas veces que se toma por sumando 1 (unidad) para formar el 4 (multiplicador).

52. En general se define la multiplicación diciendo: La multiplicación es una operación que tiene por objeto, dados dos números que se llaman multiplicando y multiplicador, hallar un tercero que se llama producto, que esté formado con respecto al multiplicando, de la misma manera que el multiplicador está formado con respecto a la unidad.

Con esta definición podemos dar interpretación a los casos no incluidos anteriormente, de ser el multiplicador la unidad o ser cero.

53. Si el multiplicador es igual a la unidad, el producto es igual al multiplicando. Si el multiplicador es cero, el producto es cero.

Varios números entre los cuales se escribe el signo de multiplicar, forman un producto de varios factores. Así:

$5 \times 4 \times 6 \times 3$ indica que el producto 5×4 se ha de multiplicar por 6 y el resultado por 3.

54. Leyes formales de la multiplicación.- La multiplicación, lo mismo cuando el producto se forma con dos factores que cuando se forma con varios, tiene las propiedades siguientes: Es uniforme, distributiva, conmutativa, asociativa y monótona.

I. Es uniforme : Los productos miembro a miembro de dos o varias igualdades constituyen otra igualdad. Así :

$$\begin{array}{l} a = a' \\ b = b' \end{array} \quad \text{se deduce} \quad a \times b = a' \times b'.$$

II. Es conmutativa : El producto 7×3, o sea tres veces siete, es igual al producto 3×7, o sea siete veces tres. El producto 7×3 es igual al número de unidades contenidas en el siguiente rectángulo :

$$1+1+1+1+1+1+1 = 7$$
$$1+1+1+1+1+1+1 = 7$$
$$1+1+1+1+1+1+1 = 7$$

Si tenemos en cuenta que en este rectángulo hay siete columnas de a tres unidades el rectángulo contendrá 3×7 unidades; luego $7 \times 3 = 3 \times 7$.

Si se trata de un producto de varios factores, se ve que es evidente que se pueden permutar los dos primeros. Así :

$$3 . 5 . 4 . 2 = 5 . 3 . 4 . 2.$$

También se pueden permutar los dos últimos, es decir, que $3 . 5 . 4 . 2 = 3 . 5 . 2 . 4$. Para ello efectuamos el producto de todos los factores que anteceden a los dos últimos y se tendrá : $3 . 5 = 15$, y multiplicando sucesivamente por 4 y por 2 se tiene : $3 . 5 . 4 = 15 . 4 = 15+15+15+15$ y $3 . 5 . 4 . 2 = 15 . 2 + 15 . 2 + 15 . 2 + 15 . 2 = 15 .2. 4 = 3 . 5 . 2 . 4$.

Se podrán permutar dos factores consecutivos cualesquiera, y por tanto cada factor podrá hacérsele ocupar el lugar que nos convenga.

Se quiere probar que $a \cdot b \cdot c \cdot d = a \cdot c\, b \cdot d$, pues se tiene que $a \cdot b \cdot c \cdot = a \cdot c \cdot b$, y por tanto $a. b \cdot c \cdot d = a. c \cdot b \cdot d$.

III. Es distributiva : Quiere esto decir : que para multiplicar una suma indicada por un número se multiplica cada uno de los sumandos por el número y se suman los productos.

Ejemplo : $(3 + 4) \times 2 = (3 + 4) + (3 + 4) = 3 + 4 + 3 + 4 = 3 + 3 + 4 + 4 = 3 \times 2 + 4 \times 2$.

Se justifican esas igualdades por definiciones y propiedades conocidas. Una diferencia, por ejemplo, $15 - 8$, para multiplicarla por 2 se multiplica el minuendo y el substraendo por 2 y se restan los productos.

Ejemplo : $(15 - 8) \times 2 = 15 \times 2 - 8 \times 2$ y en general $(a - b). \ c = a \cdot c - b \cdot c$.

En efecto : Haciendo $a - b = d$, se deduce $a = b + d$ y multiplicando ambos miembros por c se tiene :

$a \times c = b \times c + d \times c$ y de aquí $ac - bc = d \cdot c = (a - b) . c$

Cuando todos los sumandos de una suma son productos con un factor común, la suma se convierte en producto.
Cuando el minuendo y substraendo son productos con un factor común, la diferencia se transforma en producto.
A estas operaciones se llama sacar factor común.

IV. Es asociativa : Si en el producto $a \cdot b \cdot c \cdot d$ deseamos asociar los factores b y c, es decir, sustituirlos por su producto efectuado, que llamaremos p, se tendrá :

$$a. \ b. \ c. \ d = a \ (bc) \ d = a \cdot p \cdot d.$$

Esta propiedad es evidente, si los factores de que se trata son los primeros, pero como siempre puede hacerse que lo sean, en virtud de la propiedad conmutativa, la propiedad es general.

V. La multiplicación es una operación monótona quiere esto decir que si se multiplican miembro a miembro dos desigualdades del mismo sentido, los resultados forman una desigualdad del mismo sentido que las propuestas : Es decir, que de $a > b$ y $c > d$ resulta $a . c > b . d$; en efecto,

$$a \times c = a + a + a + a \ldots a(c \text{ veces}); \; b \times d =$$
$$= b + b + b \ldots\ldots b(d \text{ veces}),$$

resulta, pues, que la primera suma tiene mayor número de sumandos y mayores que los de la segunda, y por lo tanto queda evidenciada la propiedad.

Si sustituímos una de las desigualdades por una igualdad, la propiedad subsiste. En particular : Si se multiplican los dos miembros de una desigualdad por un mismo número, los resultados forman una desigualdad del mismo sentido que la propuesta.

55. El módulo de la multiplicación, es el número 1, pues $a . 1 = a$.

56. MULTIPLICACION DE NUMEROS EXPLICITOS DADOS EN DIFERENTES FORMAS.- 1ro. Una suma indicada por un número o viceversa 2do. Una diferencia indicada por un número o viceversa. 3ro. Una suma por otra suma. 4to. Una diferencia por otra diferencia.-

1er. CASO.- Para multiplicar una suma por un número se multiplica cada uno de los sumandos por el número y se suman los productos.

En efecto : $(3 + 2 + 5) . 4 = (3 + 2 + 5) + (3 + 2 + 5) + (3 + 2 + 5) + (3 + 2 + 5)$ y según los principios establecidos sobre las operaciones con sumas indicadas, el segundo miembro será igual a :

$$3+3+3+3+2+2+2+2+5+5+5+5$$

y por tanto

$$(3+2+5) . 4 = 3 \text{ X } 4 \;\; 2 \text{ X } 4 \;\; 5 \text{ X } 4$$

2do. CASO- Para multiplicar una suma por otra suma, se multiplican cada uno de los sumandos de la primera suma, por cada uno de los de la segunda y se suman todos los productos obtenidos.

Así :

$$(a+a'+a'')\ (b+b') = ab+a'b+a''b+ab'+a'b'+a''b'$$

En efecto :

Se repite la suma $(a+a'+a'')$, $(b+b')$ veces, repitiendola primero b veces y luego b' veces, lo cual se expresa con la siguiente igualdad :

$$(a+a'+a'')\ (b+b') = (a+a'+a'')\ b+(a+a'+a'')b'$$

y en virtud del caso anterior, el segundo miembro se transforma como expresa el enunciado.

3er. CASO.- Para multiplicar una diferencia por un número, se multiplica por él, el minuendo y substraendo y se restan los productos. -

Así : $(a-b).\ m = a\ .\ m - b\ .\ m.$

En efecto, esta expresión quedará justificada si el substraendo del segundo miembro $b\ .\ m$, sumado con el resto (primer miembro $(a-b)\ .\ m$ da un resultado igual al minuendo $a\ .\ m$.

$$bm + (a-b).\ m = m\ (b+a-b) = m\ .\ a$$

4to. CASO- Para multiplicar una diferencia por otra diferencia, se multiplica la primera por el minuendo y subs - traendo de la segunda y se restan los productos.

Así : $(a-a')\ X\ (b-b') = (a-a').b - (a-a')\ .\ b'$

y este segundo miembro se transforma en

$$ab - a'b - ab' + a'b'.$$

58. <u>CASOS DE LA MULTIPLICACION.- 1ro. Hallar el producto de dos números dígitos. 2do. Multiplicar un número compuesto por un dígito. 3ro. Multiplicar dos números compuestos.</u>

1er. <u>CASO</u>.- <u>Que los dos factores tengan una sola cifra</u>.

Para conocer el producto en este caso, basta saber de memoria la tabla de multiplicar, que es un cuadro de números que contiene todos los productos posibles de los números de una sola cifra.

<u>TABLA DE MULTIPLICAR</u>

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	-14-	-21-	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

Esta tabla, llamada <u>pitagórica</u>, contiene en la primera fila los productos de los nueve primeros números por <u>uno</u> en la segunda, los productos de los mismos números por <u>dos</u> y así sucesivamente hasta la última, que contiene los productos de dichos números por <u>nueve</u>. Para hacer uso de ella se busca el multiplicando en la primera línea horizontal y el multiplicador en la primera línea vertical, y el número común a la columna correspondiente al primero y a la fila correspondiente al segundo, será el producto. Así : 3 X 7 = 21, es el número común a la columna que comienza por 3 y a la fila que comienza por 7.

2do. CASO.- Que el multiplicando tenga varias cifras y el multiplicador una sola.

Sea multiplicar 427 X 5 .

El multiplicando es : $427 = 400 + 20 + 7 = 4 \qquad + 2$ $d + 7$ u designando por c, d y u, respectivamente, centenas decenas y unidades.

El producto, según sabemos, tiene que contener 5 veces más unidades que el multiplicando 427, lo que puede conse - guirse haciendo 5 veces mayores las partes 4c, 2d y 7u en que lo hemos descompuesto y sumándolas después; así obtendremos los siguientes productos parciales :

$$4c \times 5 = 20c$$
$$2d \times 5 = 10d$$
$$7u \times 5 = 35u$$

El producto será, pues, $427 \times 5 = 20c + 10d + 35u$; mas para escribirlo, tendremos en cuenta los principios fundamentales de la formación decimal de los órdenes de unidades y diremos : en 35u hay 5u y 3d, las que reunidas a las 10d forman 13d, o sea 3d y 1c, que con las 20c, constituyen 21c, que son 1c y 2 millares; luego se podrá escribir el producto siguiente :

$$427 \times 5 = 20c + 10d + 35u = 2m + 1c + 3d + 5u = 2135$$

En la práctica la operación se dispone así :

$$\begin{array}{r} 427 \\ \times \quad 5 \\ \hline 2135 \end{array}$$

REGLA .- En este caso se multiplica cada cifra del multiplicando por la del multiplicador, comenzando por la derecha se escriben las unidades de cada uno de estos productos parciales debajo de la cifra del multiplicando que la ha producido y se reservan las decenas si las hay para sumarlas al producto parcial siguiente; estas decenas, al hallar el último producto parcial se escriben a la izquierda de la cifra de sus unidades.

3er. CASO : Para la multiplicación de dos números compuestos en general, es preciso considerar antes los casos particulares en que el multiplicador es la unidad seguida de ceros y una cifra significativa seguida de ceros.

59. 1ro. -PARTICULAR. REGLA.- Para multiplicar un número por la unidad seguida de ceros, basta escribir a la derecha del multiplicando los ceros que siguen a la unidad en el multiplicador.

Así : 236 X 100 = 23600.

Conforme a los principios de la numeración, las 6 unidades del multiplicando aparecen en el producto transformadas en 6 centenas; las 3 decenas, se han convertido en 3 millares,etc. luego las partes que forman el multiplicando se han hecho 100 veces mayores, o lo que es igual, ese número ha quedado multiplicado por cien.

2do.- PARTICULAR. REGLA.- Para multiplicar un número por una cifra significativa seguida de ceros, se multiplica el número dado por dicha cifra significativa y a la derecha del producto se escriben los ceros que le siguen en el multiplicador.-

Así : 326 X 300 = (236 X 3) X 100 = 70800.

Se forma el producto en este caso, efectuando la suma de 300 sumandos iguales a 236, o lo que es igual, de 100 sumandos iguales a 236 X 3, lo cual justifica la regla.

60. CASO GENERAL .- Sea multiplicar 258 X 43.

Se trata de hallar una suma de 43 sumandos iguales a 258, y de agregarla a la otra suma de 40 sumandos iguales también a 258; ambas cosas sabemos hacer por el 2do. caso y por el 2do. particular.

La operación se dispondrá del modo siguiente :

$$\begin{array}{r} 258 \\ \times \quad 43 \\ \hline 774 \\ 10320 \\ \hline 11094 \end{array}$$

61. <u>CONCEPTOS DIFERENTES DE LA MULTIPLICACION.</u>- En abstracto, como el orden de factores no altera el producto, se puede tomar el multiplicando por multiplicador; no sucede lo mismo operando con números concretos, pues como entonces hay que tener en cuenta su naturaleza, debemos observar que el <u>producto</u>, como formado con el <u>multiplicando, debe ser de la naturaleza de éste.</u>

Así, sabiendo que por 1 peseta se compran 6 metros, si se desea saber el número de metros que se comprarán con 7 pesetas, el problema será resuelto por una multiplicación, en la que el multiplicando será 6 metros (de igual naturaleza que el producto), y el multiplicador el número 7.

62. OPERACIONES CON NUMEROS IMPLICITOS DADOS EN FORMA DE PRODUCTO.-

CASOS.- 1ro. Multiplicación de un producto por un número y viceversa.

2do. Multiplicación de dos productos.

<u>1er. CASO.</u>- Sea el producto 5 . 4 . 3.2 que deseamos multiplicarlo por 8; la operación se indica así :

$$(5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2) \cdot 8$$

Y para efectuarla basta formar con el producto y el número un solo producto (suprimir el paréntesis).

Por lo tanto : $(5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2) \cdot 8 = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 8$.

En virtud de la propiedad asociativa, puede asociarse el 8 a cualquiera de los factores del producto y tendremos:

$$(5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2) \cdot 8 = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 8 = 5 \cdot 4 \cdot 24 \cdot 2$$

Lo cual nos dice que, <u>para multiplicar un producto por un número o un número por un producto, basta multiplicar uno cualquiera de los factores por el número.</u>

2do.CASO.- Si queremos multiplicar el producto 5.4. 3. 2- por el 7 . 2 . 8, se indica la operación así :

$$(5 . 4 . 3 . 2) . (7 . 2 . 8)$$

Para efectuarla, se forma con ambos productos uno solo(se suprimen los paréntesis).

Se justifica esta regla con las siguientes igualdades, en las que A representa el valor del producto : 5. 4. 3. 2.

$$(5 .4 . 3 . 2) (7 . 2 . 8) = A.(7 . 2 . 8.)$$
$$= A . 7 . 2 . 8 = 5 . 4 . 3 . 2 .7 . 2. 8$$

Como aplicación de todo lo dicho, se puede justificar con gran facilidad la regla de la multiplicación de dos números- terminados en ceros.

Sean los números 8000 y 200; tendremos las siguientes igualdades :

$$8000 \times 200 = 8. 1000 \times 2. 100 = (8.2) (100000) = 1600000$$

Lo cual nos dice que para multiplicar dos números terminados en ceros, se prescinde de éstos; se multiplican los números que resulten y a este producto se agregan los ceros de ambos factores.

EJERCICIOS

1. Qué número es necesario sumar a 45 367 para hacerlo — 1,000 veces mayor ?
2. Hallar el producto de 3563 por 999 y por 1,001 sin efectuar directamente la multiplicación.
3. Hallar los segundos de arco que tiene el arco de 57° 17' 45''.
4. Cuál es la variación de un producto de dos factores — cuando se aumenta o disminuye uno de ellos en un determinado número natural ?
5. Cuánto aumentará el área de un rectángulo cuya base a metros y cuya altura es b metros, si la primera aumenta en 2 metros y la segunda en 10 metros ? .

II. POTENCIACION

63. Cuando todos los factores de un producto son iguales, dicho producto recibe el nombre de potencia.

Base de la potencia es el factor que la produce.

Grado de una potencia es el número de factores del producto.

64. Las potencias se escriben colocando encima y a la derecha de la base un numerito que indica el grado, y que se llama exponente.

Así : $5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^3$.

Las potencias se clasifican por su grado y se llaman de segundo, tercero, etc., grado. Las de segundo y tercer grado se llaman cuadrado y cubo respectivamente.

65. Se conviene en que la potencia de exponente cero es igual a la unidad y la de primer grado es igual a la base.

Así : $a^0 = 1$, $a^1 = a$.

Las potencias de la unidad son iguales a la unidad.

Las potencias de diez son iguales a la unidad seguida de tantos ceros como unidades tiene el exponente.

Así : $10^1 = 10$, $10^2 = 100$, $10^3 = 1000$.

Un número escrito en el sistema decimal puede transformarse en una suma de la manera siguiente :

Sea el número 2567. Este número es la expresión sumatoria de 7 unidades, 6 decenas (6 veces 10), 5 centenas (5 veces 100), y 2 millares (2 veces mil), y por tanto,

$$2567 = 2 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10^1 + 7 \cdot 10^0$$

66. La potenciación es una operación uniforme; es decir, que si se elevan a una misma potencia los dos miembros de una igualdad, el resultado será otra igualdad.

Así de la igualdad $a = b$ resulta esta otra $a^3 = b^3$.

Si se elevan a una misma potencia los dos miembros de una desigualdad, el resultado es una desigualdad del mismo signo que la propuesta.

Así de la desigualdad $a > b$ resulta esta otra : $a^3 > b^3$

Es evidente que la base y el exponente de una potencia no son permutables. Cuando se permutan, la potencia cambia, en general, de valor. La potenciación no es, pues, una operación conmutativa, como vimos que lo eran las otras dos operaciones directas, adición y multiplicación.

67. OPERACIONES CON NUMEROS IMPLICITOS DADOS EN VARIAS FORMAS EN QUE INTERVIENEN POTENCIAS.
Distinguiremos varios casos :

1. Potencia de una suma y de una diferencia.
2. Potencia de un producto.
3. Producto de potencias de igual base.
4. Producto de potencias de igual exponente.
5. Elevación de un número a dos potencias sucesivas.

1er. CASO.- Potencia de una suma. Si formamos las potencias $(a+b)^2 = (a+b).(a+b)$; $(a+b)^3 = (a+b)^2.(a+b)$, etcétera, observaremos una regularidad en la formación de los términos del resultado, que nos descubrirá una ley; para nosotros no tiene hoy importancia más que el cuadrado y cubo de la suma y de la diferencia, que se obtiene del modo siguiente:

CUADRADO DE $a+b$.

$$(a+b)^2 = (a+b).(a+b) =$$
$$(a+b).a + (a+b).b = a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

En esta serie de igualdades, se hace aplicación de la definición de potencia, de la multiplicación de dos sumas indicadas, de la multiplicación de una suma por un número, y por último se asocian ab y ab, que dan por suma $2ab$.

68.- REGLA .- El cuadrado de la suma de dos números es igual al cuadrado del primero, más el doble producto del primero por el segundo, más el cuadrado del segundo.

CUBO DE $a+b$.

$$(a+b)^3 = (a+b)^2 \,.\, (a+b) =$$
$$(a^2+2ab+b^2)\,(a+b) = (a^2+2ab+b^2)\,.\,a +$$
$$(a^2+2ab+b^2)\,.\,b. = a^3+2a^2b+ab^2+a^2b+$$
$$2ab^2+b^3 = a^3+3a^2b \quad 3ab^2+b^3$$

En esta serie de igualdades, se hace aplicación de la definición de potencias, de la multiplicación de una suma por otra de la de un producto por un número y por último se asocian - $2a^2b$ y a^2b, que suman $3a^2b$ y también se asocian ab^2 y $2ab^2$.

69. REGLA .- El cubo de la suma de dos números es igual - al cubo del primero, más el triplo del cuadrado del primero, por el segundo, más el triplo del primero por el cuadrado del segundo, más el cubo del segundo.

En particular si un número N se compone de d decenas y de u unidades, se podrá escribir :

$$N = d \times 10 + u$$

y elevando al cuadrado ,

$$N^2 = (d^2.10+u)^2 = d^2.\,10^2 + 2d\,.10.u + u^2$$

70. Se compone, pues, dicho cuadrado, de tres partes: cuadrado de decenas, doble producto de decenas por unidades y cuadrado de unidades.

Si la misma igualdad se eleva al cubo, se tendrá :

$$N^3 = (d\,.10+u)^3 = d^3\,.\,10^3 + 3d^2\,.\,10^2u + 3.d\,.\,10\,.\,u^2 + u^3$$

71. Se compone, pues, dicho cubo, de cuatro partes : cubo de las decenas, triplo del cuadrado de las decenas por las unidades, triplo de las decenas por el cuadrado de las unidades y cubo de unidades.

El cuadrado y el cubo de una diferencia se obtienen del mismo modo y se llega a los siguientes resultados :

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$
$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

2do. CASO.- Potencia de un producto.- Si se desea elevar el producto 3 . 5 . 4 . 2 a la tercera potencia, por ejemplo se podrá escribir :

$$(2 . 5 . 4 . 2)^3 = (3 . 5 . 4 . 2) \times (3.5.4.2).(3.5.4.2) =$$
$$3.5.4.2.3.5.4.2.3.5.4.2 = 3^3 . 5^3 . 4^3 . 2^3$$

En esta serie de igualdades hemos hecho uso de la defini - ción de potencias, de la multiplicación de productos y de la asociación de factores.

REGLA.- Para elevar un producto a una potencia se elevan a dicha potencia cada uno de los factores.

73. 3er. CASO.- Producto de potencias de igual base.

Si queremos multiplicar 5^4 por 5^3, podremos escribir :

$$5^4 \times 5^3 = 5.5.5.5.5.5.5. = 5^7 = 5^{4+3}$$

Para obtener este resultado hemos hecho uso de la defini - ción de potencias.

REGLA .- El producto de dos o de varias potencias de una misma base es otra potencia de la misma base, cuyo exponente es la suma de los exponentes.

74. 4to. CASO.- Elevación de un número a dos potencias sucesivas.

Si queremos elevar el número 5^4 a la potencia 3, podremos escribir :

$$(5^4)^3 = 5^4 . 5^4 . 5^4 . = 5^{4+4+4} = 5^{4 \times 3}$$

REGLA.- Para elevar un número a dos potencias sucesivas, se multiplican los exponentes, dejando la misma base.

5to. CASO .- Producto de potencias de igual exponente.

Sea el producto a b c, podemos escribir :

$$a^4 = a . a . a . a$$
$$b^4 = b . b . b . b$$
$$c^4 = c . c . c . c$$

$$a^4 . b^4 . c^4 = (a . b . c) .(a . b . c).(a.b.c)(a.b.c) = (a.b.c)^4$$

Llegamos a este resultado, multiplicando miembro a miembro las anteriores igualdades, asociando convenientemente los factores en el segundo y aplicando después la definición de potencia.

$$(a \cdot b \cdot c)^4 = a^4 \cdot b^4 \cdot c^4$$

Esta igualdad nos demuestra nuevamente la regla para elevar un producto a una potencia .

OBSERVACION.- En la aplicación de esta regla nada importa que los factores del producto estén elevados a potencias

Así : $(5^3 \cdot 4^2 \cdot 7^6)^4 = (5^3)^4 \cdot (4^2)^4 \cdot (7^6)^4 = 5^{12} \cdot 4^8 \cdot 7^{24}$

EJERCICIOS

1. Comprobar que escribir un número en un sitema decimal es considerarlo como suma de potencias de la base del sistema.-
2. Comprobar que el producto de la suma de dos números por su diferencia es igual a la diferencia de sus cuadrados
3. Demostrar que el cuadrado de un número natural no puede terminar en 2, 3, 7 y 8.
4. Justificar que el producto 286^7 X 35^4 termina en 0
5. Una noria saca en cada hora tantos litros de agua como horas ha trabajado. Cuántos litros ha sacado en 29 horas ? Y en x horas ?

CAPITULO V

DIVISION

75.- Se llama múltiplo de un número el producto de éste por otro cualquiera.- Se obtendrán, pues, todos los múltiplos de un número, multiplicándole separadamente por los de la serie natural; los múltiplos de un número constituyen por consiguiente, como los de la serie natural, una sucesión indefinida; se considera el cero múltiplo de todos los números.

La serie de los múltiplos de 5 será :

$$5 \times 0,\quad 5 \times 1,\quad 5 \times 2,\quad 5 \times 3,\quad 5 \times 4 \quad \text{etc}$$

o sea $\quad 0 \quad 5 \quad 10 \quad 15 \quad 20 \quad$ etc.

La serie de los múltiplos de a será :

$a \times 0$, $a \times 1$, $a \times 2$, $a \times 3$, $a \times 4$, ...$a \times c$, $a \times (c+1)$, etc. o sea $0, a, 2a, 3a, 4a \ldots c \ldots a, (c+1)\,a \ldots$

Si tenemos un número D y otro d, y formamos la serie de los múltiplos de d, se podrá escribir :

$$0,\ d,\ 2d,\ 3d\ \ldots\ cd,\ (c+1)\,d\ \ldots \quad (1)$$

El número D puede ser igual a uno de los de la serie (1) — a $c \cdot d$, por ejemplo, y se podrá escribir :

$$D = d \cdot c$$

esta igualdad nos dice que d está contenido en D, c veces.

Si el número D no es igual a uno de la serie (1), necesariamente estará comprendido entre dos de ella, por ejemplo, entre cd y $(c+1)\,d$ y se podrá escribir :

$$cd < D < (c+1)\,d$$

será, pues, $D = cd + r$ (1) siendo $r < d$ (2).

76. LLamando a los números D y d, dividendo y divisor a c y r cociente y resto, definiremos la operación de la división diciendo que tiene por objeto, dados los números D y d, hallar otros dos, c y r, tales, que se verifiquen las relaciones (1) y (2) : estos dos números se llaman cociente entero y resto entero.

Se ve claramente que el cociente expresa el número de veces que el dividendo contiene al divisor.

77. El resto r puede ser cero y entonces la división se llama exacta.

De la relación $D = d.c$ se deduce que en este caso c cociente, es precisamente el número que, multiplicado por d (divisor), nos reproduce el dividendo D.

78. Se puede, pues, en este caso, definir la división como operación inversa de la multiplicación : dados un producto de dos factores D y uno de ellos d, hallar el otro c.

De la igualdad $D = d \cdot c + r$ se deduce que $r = D - dc$

79. Es, pues, el resto la diferencia entre el dividendo y el producto del divisor por el cociente entero.

Si multiplicamos el divisor por 10, lo cual se consigue agregándole un cero, habremos formado un número igual a diez veces el divisor; si este número es mayor que el dividendo, se puede asegurar que el dividendo contiene al divisor menos de diez veces, o lo que es lo mismo, que el cociente entero tendrá una sola cifra, pero si el número formado agregando al divisor un cero es menor que el dividendo, el cociente entero tendrá varias cifras.

El cociente de los números 456 y 78 tendrá una sola cifra, porque $780 > 456$, lo cual quiere decir que 456 contiene al 78 menos de 10 veces.

Para hallar el cociente entero, bastará restar del dividendo y de los restos sucesivos todas las veces que sea posible el divisor; contando el número de substracciones efectuadas tendremos el cociente entero, y el resto correspondiente a la última substracción será el resto de la división.

La operación se indica con el signo : que se lee <u>dividido por</u>, colocado entre el dividendo y el divisor.

Así : 35 : 8 quiere decir que debemos averiguar las veces que 35 contiene a 8.

La operación se dispondrá así :

$$\begin{array}{r} 35 \\ -8 \\ \hline 27 \\ -8 \\ \hline 19 \\ -8 \\ \hline 11 \\ -8 \\ \hline 3 \end{array}$$

y vemos que el cociente entero es 4 y el resto 3, y se puede escribir : $35 = 8 \cdot 4 + 3$.

Este procedimiento es penoso cuando el dividendo es grande y el divisor pequeño; por eso es indispensable modificarlo y para ello distinguiremos varios casos.

80. CASOS DE LA DIVISION :

Cociente de una cifra	divisor de una	1er. caso
	divisor de varias	2do. caso
cociente de varias cifras	divisor de una	3er. caso
	divisor de varias	4to. caso

<u>1er. CASO.- Que el divisor y el cociente tengan una cifra.</u> Sea, por ejemplo, hallar el cociente de los números 38 y 5, que sabemos consta de una sola cifra.

En la tabla de multiplicar, tenemos los múltiplos de 5 en la columna que encabeza ese número; el mayor de ellos contenido en 38 es el 35, o sea el 5 X 7, lo cual nos dice que el cociente entero será 7, y el resto la diferencia entre 38 y 35, o sea 3.

2do. CASO.- Que el divisor tenga varias cifras y el cociente una.

Sea, por ejemplo : 4556 : 852.

El cociente de estos números tiene una cifra, toda vez- que $8520 > 4556$.

Para determinar esta cifra se practica la siguiente regla que justificaremos :

81. REGLA . Para hallar el cociente de dos números cuando- el divisor tiene varias cifras y el cociente una sola, se divide por la cifra de orden más elevado del divisor el número- de unidades del mismo orden del dividendo; el cociente obtenido puede ser mayor que el que se busca; para comprobarlo se - multiplica por el divisor y si este producto se puede restar del dividendo, dicho cociente es el que se buscaba.

Puesto que la primera cifra del divisor en nuestro ejemplo es 8 y representa centenas, dividiremos por 8 el número 45, que es el de centenas del dividendo; el cociente de esta división es 5 y esta cifra u otra menor, será la que se busca; pero como el producto $852 \times 5 = 4260$ es menor que el dividendo 4556, la cifra 5 será el cociente.

En la práctica se efectúa la multiplicación y la substracción a un tiempo y se dispone la operación del modo siguiente

$$\begin{array}{r|l} 4556 & 852 \\ \cline{2-2} 296 & 5 \end{array}$$

y se dice : 5 por 2 son 10, al 16 van 6; 5 por 5 son 25 y 1 son 26, a 35 van 9 ; 8 por 5 son 40 y 3 son 43, al 45 van 2.

En el ejemplo propuesto se sabe que el cociente es menor - que 10; la cifra que lo representa debe ser tal, que multiplicando por ella las centenas del divisor, resulte un número - de centenas contenido en las 45 centenas del dividendo, en las cuales podrá haber otras centenas que provengan de multiplicar las decenas y unidades del divisor por la cifra del cociente; resulta, pues, que si representamos por c el cociente,

$$8 . c \leqq 45$$

y por lo tanto, dividiendo por 8 los dos miembros,

$$c \leqq 45 : 8$$

82.- TANTEO DE LA CIFRA. En lugar de empezar la multiplicación y substracción por las unidades de orden inferior, se acostumbra en la práctica a comenzar por las de orden superior. Si procediendo de este modo se halla un resto igual o mayor que la cifra que se comprueba, puede desde luego asegurarse que es la verdadera; si alguna substracción parcial no puede verificarse, la cifra debe desecharse por ser grande.

Otro ejemplo :

$$\begin{array}{r|l} 4156 & 864 \\ \hline 700 & 4 \end{array}$$

Diremos : 41 dividido por 8, a 5; esta cifra es la que se busca o grande; se tantea del modo siguiente : 8 centenas por 5 son 40 centenas, a 41 centenas va una centena que con las 5 decenas forman 15 decenas; 6 decenas por 5 son 30 decenas, que no pueden restarse de las 15 decenas faltando por lo menos 1 decena, y teniendo aún que restar el producto de 4 unidades por 55, se ve que el dividendo no contiene 5 veces al divisor, para ver si lo contiene 4 veces, diremos : 8 centenas por 4 son 32 centenas, a 41 centenas van 9 centenas; como este resto 9 es superior a 4, que es la cifra que estamos comprobando, esta cifra será buena. En efecto, verificada la primera substracción, queda por restar aún el producto del cociente por el número formado por las cifras de decenas y unidades del divisor; como este número no llega a 1 centena, nos quedan por restar menos de 4 centenas, y como sólo de la substracción anterior nos han quedado 9 centenas, la substracción total es posible, o, lo que es lo mismo, la cifra 4 es la que se busca.

3er. CASO .- Se resuelve aplicando la regla del siguiente :
CASO GENERAL.- Que el divisor y el cociente tengan varias cifras.

Supongamos que se quiere efectuar la división siguiente :

$$348459 : 456$$

La operación se practica con arreglo a la siguiente regla que luego justificaremos :

83. REGLA.- Se separan de la izquierda del dividendo las cifras necesarias para formar un número mayor que el divisor y menor que diez veces el divisor (en nuestro ejemplo (3484) este número se llama primer dividendo parcial (el orden decimal de su última cifra es el mismo que el de la primera cifra del cociente; en nuestro ejemplo centenas; lo cual nos dice que el cociente que se busca tiene tres cifras) ; el primer dividendo parcial se divide por el divisor (2do. caso); a la derecha del resto se escribe la cifra siguiente del dividendo y se tendrá el segundo dividendo parcial, que se divide por el divisor y se tiene la segunda cifra del cociente, y así se continúa hasta agotar las cifras del dividendo : el último resto obtenido será el resto de la división.

La operación se dispone del modo siguiente :

$$\begin{array}{r|l} 3484'59 & 456 \\ \cline{2-2} 292\ 5'9 & 764 \\ 18\ 99 & \\ 0\ 75 & \end{array}$$

En efecto : llamado D al dividendo, se podrá escribir la siguiente limitación :

$$456 \,.\, 100 < D < (456 \,.\, 10) \,.\, 100$$

Si llamamos C al número de centenas del dividendo, se podrá escribir esta otra :

$$456 < C < 456 \,.\, 10$$

El número de centenas del dividendo no es inferior al divisor, pero si es menor que diez veces el divisor. Esto nos dice que si de la izquierda del dividendo se separan cifras bastantes para formar un número comprendido entre el divisor y diez veces el divisor, el orden correspondiente a la última cifra separada será centenas, y como el dividendo completo es un número comprendido entre cien y mil veces el divisor, el número de cifras del cociente será tres y su primera cifra -

representará centenas.

El producto del divisor por las centenas del cociente es un número exacto de centenas, que deberá hallarse contenido en las centenas del dividendo, lo cual justifica la regla, ya que el dividendo propuesto contendrá al divisor 700 veces y el resto será 29259; este resto contendrá al divisor 60 veces y el resto será 1899; este resto contendrá al divisor 4 veces y el resto será 75; en resumen; el cociente será un número compuesto de 7 centenas, 6 decenas y 4 unidades y el resto de la división será 75.

84. PRUEBA. Se multiplica el divisor por el cociente y se agrega el resto cuando la división es inexacta; esta suma debe ser igual al dividendo si la operación está bien hecha.

85 CONCEPTOS DISTINTOS DE LA DIVISION EXACTA.- Si la división es exacta, conservando las notaciones, se podrá escribir

$$D = d \cdot c \quad \text{y también} \quad D = c \cdot d$$

Cuando se considera el dividendo igual a tantos divisores como unidades tiene c, la operación de dividir se define : Hallar un número que exprese las veces que el dividendo contiene al divisor.

Cuando se considera el dividendo como igual a tantos cocientes como unidades tiene el divisor d, la operación de dividir se define : Repartir el dividendo en tantas partes iguales al cociente como unidades tiene el divisor : a este segundo concepto debe esta operación su nombre.

En abstracto, como el orden de factores no altera el producto, del mismo modo se resuelve el problema de hallar el multiplicador (primer concepto) que el multiplicando (segundo concepto), pero en concreto, unos y otros problemas son bien distintos.

1ro. Si sabemos que en 1 hora arroja una fuente 6 litros, y se busca el tiempo necesario para llenar un recipiente de 42 litros, diremos que el número de horas es el de veces que 42 litros contiene a 6 litros; siendo 7, la capacidad del reci -

piente será igual a 7 veces 6 litros, y se habrá buscado el multiplicador.

2do. Si queremos averiguar la cantidad que corresponde a cada socio, siendo su número 5 y la cantidad a repartir en partes iguales 120 pesetas, diremos que 120 pesetas debe ser igual a 5 veces el cociente; es decir, que se busca el multiplicando.

86 LEYES FORMALES DE LA DIVISION. La división exacta es una operación uniforme, distributiva, monótona e invariante.

1. La división es una operación uniforme : Esta ley nos dice, que si se dividen miembro a miembro dos igualdades -- siendo exactas las divisiones, los resultados son iguales.

De $\begin{matrix} a = b \\ c = d \end{matrix}$ se tendrá $a : c = b : d$, Si esto no fuera cierto resultaría una desigualdad de multiplicar esa expresión por $c = d$, y como resulta $a = b$, la propiedad -- queda evidenciada.

II. La division es distributiva con relacion a la adicion y substracción : Si queremos dividir la suma de varios múltiplos de un número por éste, se podrá dividir por él cada uno de los sumandos. Así : $(27+12+9) : 3 = (27 : 3) + (12 : 3) + (9 : 3) = 9 + 4 + 3$. Este número será el cociente, toda vez que multiplicado por el divisor 3, reproduce el dividendo.

Igual se demuestra que para dividir una diferencia, cuyo minuendo y substraendo son múltiplos de un número, por dicho número, se divide el minuendo y el substraendo por el número y se restan los cocientes.

III. La división es una operación monótona : Si se dividen miembro a miembro una desigualdad por una igualdad, los cocientes forman una desigualdad del mismo sentido.

Así de $\begin{matrix} a > b \\ c = d \end{matrix}$ se deduce $a : c > b : d$, pues sólo así al multiplicar los dos miembros del resultado por los de la igualdad $c = d$, puede resultar $a > b$.

<u>Si se dividen miembro a miembro una igualdad por una desigualdad, resulta una desigualdad de sentido contrario a la del divisor</u>.

Así de $\begin{matrix} 70 = 70 \\ 7 > 2 \end{matrix}$ se deduce $70 : 7 < 70 : 2$, o sea

$10 < 35$. <u>Si se dividen miembro a miembro dos desigualdades de sentidos contrarios, los cocientes forman una desigualdad del mismo sentido que la del dividendo</u>.

Así de $\begin{matrix} a > a' \\ b < b' \end{matrix}$ se deduce $(a : b) > (a' : b')$.

En efecto : Si dividimos ordenadamente las expresiones $\begin{matrix} a > a' \\ b = b \end{matrix}$ se obtiene $a : b > a' : b$ si se dividen $\begin{matrix} a' = a' \\ b < b' \end{matrix}$ se tiene $a' : b > a' : b'$, luego $a : b$ con mayor razon, será mayor que $a' : b'$.

<u>La división goza de la propiedad invariante</u>. <u>Quiere esto decir que si se multiplican el dividendo y el divisor por un mismo número, siempre en el supuesto de ser exactas las divisiones, el cociente no varía</u>.

En efecto : Si $a : b = c$, se deduce que $a = bc$ y multiplicando ambos miembros por el número <u>n</u>, tendremos :

$$a \cdot n = (b \cdot n) \cdot c, \text{ y por tanto } (a \cdot n) : (b \cdot n) = c$$

87. En algunas aplicaciones de la Aritmética, conviene considerar el número que resulta de aumentar una unidad al cociente; si a éste se le representa por c, el número de que se habla será designado por $c + 1$; a uno se le llama <u>cociente por defecto</u> y al otro <u>por exceso</u>.

Se sabe que el dividendo en la división inexacta está comprendido entre dos múltiplos del divisor y se podrá escribir:

$$d \cdot c < D < d\ (c + 1)$$

de esta limitación resultan evidentemente estas igualdades

$$D = d \cdot c + r \qquad r < d$$
$$D = d\ (c + 1) - r' \qquad r' < d$$

Los números r y r' se llaman, respectivamente, restos aditivo y substractivo y su suma es igual al divisor

En efecto : de las igualdades anteriores se deduce esta otra :

$$d \cdot c + r = d.\ (c + 1) - r'$$

o sea

$$d \cdot c + r = dc + d - r'$$

y restando de los dos miembros d. c , resulta :

$$r = d - r' \quad o \quad r + r' = d.$$

88. DIVISION DE NUMEROS IMPLICITOS EN CASOS PARTICULARES, SIENDO DADOS EN DIFERENTES FORMAS.

1ro. Dividir una suma por un número, cuando todos los sumandos son múltiplos del divisor.

2do. Dividir una diferencia por un número, cuando el minuendo y el substraendo son múltiplos del divisor.

3ro. Dividir un producto por uno de sus factores y también por un divisor exacto de uno de sus factores.

4to. Dividir un número por un producto.

5to. Dividir dos productos cuando todos los factores -- del divisor forman parte del dividendo.

6to. Dividir dos potencias de la misma base, cuando el exponente del dividendo es mayor que el del divisor.

7mo. Dividir dos potencias semejantes cuando la base - del dividendo es múltiplo de la base del divisor.

1er. CASO. - Dividir una suma indicada, de sumandos multiplos del divisor.

Sea el dividendo la suma 8 + 6 + 12 y el divisor 2;

para hallar el cociente se dividen cada uno de los sumandos- por el divisor y se suman los cocientes obtenidos.

Así : $(8 + 6 + 12) : 2 = 4 + 3 + 6$.

Esta suma multiplicada por el divisor nos reproduce el dividendo.

2do. CASO.- Dividir una diferencia de términos múltiplos - del divisor.- Sea el dividendo, la diferencia $33 - 15$ y el divisor 3 ; se dividirán el minuendo y el substraendo por el divisor y se restarán los cocientes.

Así : $(33 - 15) : 3 = 11 - 5$.

3er. CASO.- Dividir un producto por uno de sus factores.- Sea el dividendo $5 . 3.6$ y el divisor 3.

Se podrá escribir : $(5 . 3 . 6) : 3 = 5 . 6$. luego : Para dividir un producto por uno de sus factores basta suprimir dicho factor.

Si queremos dividir $15 . 20 . 11$ por 10, diremos :

$$(15 . 20 . 11) : 10 = (15 . 2 . 10. 11):10 = 15. 2. 11$$

luego : Para dividir un producto por un divisor exacto de uno de sus factores, basta dividir ese factor por el divisor.-

4to. CASO : Dividir un número por un producto.

REGLA.- Para dividir un número por un producto se divide- este número y los cocientes sucesivos por cada uno de los- factores.

Supongamos que la división sea exacta; por ejemplo :

$$350 : (2 . 5 . 7) = 5$$

se tendrá :

$$350 = 2 . 5 . 7 . 5$$

y si dividimos los dos miembros de esta igualdad por 2 y los dos de la que resulte por 5 y los dos de la que resulte por 7, se podrá escribir :

$$\{[(350 : 2) : 5]\} : 7 = 5.$$

En el caso de no ser exacta la división se halla por la misma regla el cociente entero.

5to. CASO.- Dividir dos productos cuando todos los factores del divisor forman parte del dividendo.

REGLA.- Se suprimen en el dividendo todos los factores del divisor . Así : $(a \times b \times c \times d) : (b \times d) = a \cdot c$.

6to. CASO.- Dividir dos potencias de igual base.

Sea por ejemplo :

$$7^5 : 7^3 = 7^{5-3} = 7^2$$

Lo cual nos dice que para efectuar esa división se restan los exponentes conservando la base.

Si el exponente del dividendo es igual al exponente del divisor y se aplica la regla, resulta un número con exponente cero, y como el dividendo y el divisor son, en este caso iguales, se ve que todo número con exponente cero es igual a la unidad; así : $a^0 = 1$.

7mo. CASO.- Dividir dos potencias semejantes, cuando la base del dividendo es múltiplo de la base del divisor.

Sea, por ejemplo : $8^3 : 4^3 = (8 : 4)^3 = 2^3$

porque $4^3 \times 2^3 = (4 \times 2)^3 = 8^3$.

Luego, para dividir en este caso dos potencias de igual exponente, se dividen las bases, dejando el mismo exponente.

EJERCICIOS

1. Convertir 206265 segundos de arco en grados, minutos y segundos.

2. El área de un triángulo es 1865 m^2 y la base es 175m. Hallar la altura.

3.- Que tiempo empleará un auto en recorrer 4755 kilómetros a una velocidad de 45 km. por hora ?

4. Un solar de 581 m. ha costado RD$1,709.48. Hallar el valor de un m.

5. Si los números 3457 y 15 son, respectivamente, el dividendo y el cociente de una división, Qué número puede ser el divisor y el resto ? (varias soluciones).

6. La suma de dos números es 157; el cociente y resto de su división son, respectivamente, 7 y 13. Cuáles son esos números ?

7 Dos trenes salen a la misma hora y en el mismo sentido de dos estaciones que distan 30 kilómetros, con velocidades de 65 y 60 kilómetros, respectivamente. Cuánto tiempo tardarán en encontrarse ?

8. En toda división el resto es menor que la mitad del dividendo.

9. En 1940 las inversiones en la Industria del Azúcar se elevaban en la República Dominicana a $61,640,625.- de los cuales $5,022,071.-, eran del capital Dominicano. Cuántas veces superaba a este último el extranjero ?.

LIBRO - II

PROPIEDADES ELEMENTALES DE LOS NUMEROS

CAPITULO I.

D I V I S I B I L I D A D

89. Si formamos los múltiplos de un número, del 4 por ejemplo, se podrán ordenar en serie y tendremos :

$$4 . 0;\ 4 . 1;\ 4 . 2;\ 4 . 3 \ldots 4.m;\ 4. (m + 1)..$$

Un número N cualquiera, puede ser igual a uno de esa serie, por ejemplo, $N = 4m$; se dice entonces que N es múltiplo de 4 o que N es divisible por 4 y también que 4 es divisor de N.

Puede ocurrir que el número N se halle comprendido entre dos de la serie, por ejemplo : $4 . m < N < 4 . (m + 1)$, lo cual prueba que $N = 4m + r$, siendo $r < 4$; en este caso el número N no es divisible por 4; el resto de la división de N por 4 es r.

Para indicar un múltiplo cualquiera de un número se escribirá este número con un punto encima : así $\dot{m}$ se lee múltiplo de m.

90. TEOREMA.- Si un número es divisor de otros dos, es divisor de su suma y también lo es de su diferencia.

Sean los números a y b múltiplos de 7, se tendrá :

$$(1) \quad \left.\begin{aligned} a &= 7 \times m \\ b &= 7 \times m' \end{aligned}\right\} \text{ sumando tendremos :}$$

$a + b = 7 (m + m')$, lo cual prueba que la suma $a + b$ es un múltiplo de 7, o lo que es igual, que 7 es un divisor de $a + b$. Si restamos las igualdades (1) miembro a miembro, se obtendrá la igualdad $a - b = 7 (m - m')$, lo cual prueba que el número 7 también es divisor de la diferencia $a - b$.

COROLARIO. Si un número divide a otro, también será divisor de sus múltiplos. El número 7 que divide a b, tendrá que dividir a b . m, que es la suma b + b + b + b .... b.

91. TEOREMA : El cociente de dividir la suma de dos números A y B por m, se obtiene dividiendo A por m, agregando el resto de esta división al sumando B y dividiendo esta suma por m; la suma de los cocientes de ambas divisiones será el cociente pedido y el segundo resto será el de la división de la suma por m.

En efecto, dividamos A por m y llamemos q_1 al cociente y r_1 al resto; dividamos la suma $r_1 + B$ por m, y llamemos q_2 al cociente y r_2 al resto; podremos escribir las siguientes igualdades :

$$A = mq_1 + r_1$$

$$r_1 + B = mq_2 + r_2$$

sumando miembro a miembro resultará :

$$A + r_1 + B = mq_1 + mq_2 + r_1 + r_2$$

suprimiendo el sumando r_1 de ambos miembros y sacando el segundo, m factor común, tendremos :

$$A + B = m(q_1 + q_2) + r_2$$

lo cual prueba lo que se quería demostrar, toda vez que $r_2 < m$

OBSERVACION. Si dividimos los números $1 = 10^0$, 10^1, 10^2, 10^3...... por m y llamamos a los restos obtenidos $r_0 = 1$; r_1 , r_2 , r_3.....; multiplicamos estos números respectivamente por las cifras u, d, c ..... (unidades, decenas, centenas, etc.), de un número N, se habrá formado así el número siguiente :

$$u + d.\ r_1 + cr_2 + \ldots\ldots\ldots$$

92.- TEOREMA GENERAL.- Para que el número N sea divisible por m se necesita y es suficiente que el número

$$u + d\ .\ r_1 + c.r_2 + \ldots\ldots$$

formado como se ha explicado, sea divisible por m.

Conservando las notaciones anteriores, se pueden escribir las igualdades siguientes :

$$1 = \dot{m} + 1$$
$$10 = \dot{m} + r_1$$
$$10 = \dot{m} + r_2$$

multiplicando la primera por u, la segunda por d, la tercera por c y así sucesivamente, se tendrá :

$$u = \dot{m} + u$$
$$d.10 = \dot{m} + d.r_1$$
$$c.10^2 = \dot{m} + c.r_2$$

Sumando estas igualdades miembro a miembro, resultará :

$$u + d.10 + c.10^2 + \ldots\ldots = N = \dot{m} + \{u + dr_1 \quad cr_2 \quad \ldots\}$$

El resto que se obtiene al dividir esta suma por m es el que resulta de dividir el segundo sumando, toda vez que el primero es divisible por m, y por lo tanto el número N será divisible por m si $(u + dr_1 + cr_2 + \ldots\ldots)$ lo es.

REGLAS DE DIVISIBILIDAD POR 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, y 11

Dividiremos las potencias sucesivas de 10, $10^0 = 1$, 10, 10^2, por 2, 3, 4, etc., y obtendremos los restos particulares que hemos llamado 1, r_1, r_2, r_3, ...

Por ejemplo :

$$\begin{array}{r|l} 1\,000\ldots & 3 \\ \cline{2-2} 10 & 33\ldots \\ 10 & \\ 1 & \end{array}$$

Se ve que en este caso, $r_1 = r_2 = r_3 \ldots. = 1$, y la condición de divisibilidad quedará reducida a la forma

$$(u + d + c \quad \ldots.) = \dot{m}$$

Luego : Para que un número sea divisible por 3, es preciso que la suma de los valores absolutos de sus cifras sea divisible por 3. Así el número 351 es divisible por 3 y 362 no lo es y el resto de su división por 3 es 2.

El siguiente cuadro contiene los restos de las potencias sucesivas de 10 (excepto el de $10^0 = 1$, que es siempre 1), por los números 2, 3, 4, 5, 6, 7 y 11 sirve para hallar las reglas de divisibilidad por estos números.

m	r_1	r_2	r_3	r_4	r_5	r_6
2	0	0	0	...	...	...
3	1	1	1	...	...	...
4	2	0	0	...	...	...
5	0	0	0	...	...	...
6	4	4	4	...	...	...
7	3	2	6	4	5	...
11	10	1	10	1	...	...

POR EJEMPLO : Un número es divisible por 2 cuando la cifra de sus unidades lo es; es decir, cuando es cero o cifra par.

Un número es divisible por 7, cuando dividido en secciones de tres cifras, la suma de los productos que se obtienen multiplicando las unidades, decenas y centenas de los grupos de lugar par por 6, 4 y 5, resulta un múltiplo de 7.-

Sea el número 256142; escribiremos :

$$2 \times 1 + 4 \times 3 + 1 \times 2 + 6 \times 6 + 5 \times 4 + 2 \times 5 = 82 = \dot{7} + 5$$

Luego, el número no es divisible por 7.

Si en lugar de considerar los restos 6, 4 y 5 correspondientes a los órdenes de unidades comprendidas en los grupos de tres cifras de lugar par, se consideran los cocientes por exceso y los restos substractivos, la forma general del número N será :

$$N = \dot{m} + (u_1 + 3d_1 + 2c_1 - u_2 = 3d_2 - 2c_2 +$$

$$u_3 + 3d_3 + 2c_3 - u_4 \ldots\ldots)$$

La regla se simplifica en la siguiente forma : Para que un número sea divisible por 7, es preciso que, dividido en secciones de tres cifras y multiplicadas éstas por 1, 3, 2, respectivamente la diferencia entre las sumas de esos números correspondientes a los grupos de lugar impar y las de lugar par sea un múltiplo de 7.

Sea el número 412652 que se desea saber si es divisible por 7.

$$(2.1 + 5.3 + 6X2) - (2.1 + 1.3 + 4.2) = 29 - 13 =$$

$$16 = 7 + 2$$

Luego el número deja de resto 2 al dividirlo por 7.

EJERCICIOS

1. Averiguar que números divididos por 5 dan de resto 2.
2. Demostrar que cuando un número no es divisible por 3, su cuadrado es un múltiplo de 3 aumentado en una unidad.
3. Todas las potencias de 100 son números que divididos por 9, 11 o 33 dan el resto 1.
4. Qué restos se obtienen al dividir el número 32754072 por 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 y 10 ?
5. Probar que la diferencia de los cuadrados de dos números, que se diferencian en dos unidades, es un múltiplo de 4.

6. Demostrar que el número $n(n^2 - 1)$ es múltiplo de 2 y 3.

7. La diferencia entre dos números formados por tres cifras consecutivas, invirtiendo su orden de sucesión es 198.

8. La diferencia entre dos números formados por tres cifras en orden inverso es divisible por 9.

9. Probar que el producto de los números $n(n + 1)(2n+1)$ es múltiplo de 6.

10. Condición para que el producto de tres números consecutivos sea divisible por 24.

CAPITULO II

DIVISORES Y MULTIPLOS DE DOS NUMEROS

I. MAXIMO COMUN DIVISOR DE DOS NUMEROS.-

93. Un número divisor de otros dos se dice que es un divisor común de ambos : como un divisor común de dos números no puede exceder al menor de ellos, existe siempre un divisor común mayor que todos los demás: este divisor común se llama máximo y se designa por la notación m. c. d.

Si el m. c. d. de dos números es la unidad, dichos números se llaman primos entre sí.

94 TEOREMA. Todo divisor común del dividendo y del divisor, es divisor del resto de la división; será, pues, divisor común del divisor y del resto.

Llamemos D al dividendo, d al divisor, c al cociente y r al resto; se tendrá :

$$D = d.c + r$$

Un divisor n de D y d, por serlo de d lo será de su múltiplo d. c, y por lo tanto de la diferencia.

$$D - d.c = r$$

RECIPROCAMENTE : Todo divisor común del divisor y del resto lo es del dividendo; será, pues, divisor común del dividendo y divisor.

En efecto, todo divisor de d y r, por serlo de d, lo será de su múltiplo $d.c$, y por lo tanto de la suma $d.c + r = D$

95. TEOREMA : Cuando el dividendo y el divisor de una división se multiplican por un mismo número o se dividen por un factor común de ambos, el cociente no varía, y el resto queda multiplicado por dicho número o dividido por dicho factor.

1ro. Se tiene : $D = d.c + r \quad r < d.$

Multiplicando por un número n los dos miembros de éstas expresiones, se tendrá :

$$D.\ n = (dn).c + rn$$

lo cual prueba que $D.\ n$ contiene a dn, c veces, como D a d, pero el resto ya no es r, sino rn.

2do. De las expresiones $D.n = (d.n)\ c + rn \quad rn < dn$, se deduce dividiendo por n sus dos miembros; estas otras

$$D = d.c + r \quad r < d,$$

que prueba la segunda parte del enunciado.

96. TEOREMA El máximo común divisor de dos números divisibles uno por otro, es el menor de ellos.

Así, m.c.d. (16,8) = 8, porque 8 es divisor común y no puede haber otro mayor.

97. TEOREMA. El máximo común divisor de dos números cualesquiera, es el mismo que el del menor de ellos y el resto de su división.

Sean los números 324 y 72,
se tendrá : $324 = 72.4 + 36.$

Carmen Scarlett

Según lo dicho anteriormente, los números 324 y 72 tienen los mismos divisores comunes que 72 y 36, y por lo tanto el mismo m. c. d. ; el de estos dos números, por ser divisibles uno por otro es 36; luego 36 es el m . c. d. de 324 y 72

REGLA.- Para hallar el máximo común divisor de dos números se divide el mayor por el menor; si la división es exacta, el menor será el máximo común divisor; en el caso contrario, se vuelve a dividir el divisor por el resto y así se continúa pasando los restos sucesivos a ser divisores; el último divisor o sea el penúltimo resto será el máximo común divisor.

La operación se dispone así :

	4	2
324	72	36
36	00	

En general, llamando A y B a los números dados; q_1, q_2, q_3, q_4, ... a los cocientes de las divisiones sucesivas y r_1, r_2, r_3 .... los restos se pueden escribir :

	q_1	q_2	q_3	q_4
A	B	r_1	r_2	r_3
r_1	r_2	r_3	0	

lo cual pone de manifiesto que el m. c. d. (A, B) = r_3 toda vez que el resto correspondiente al cociente q_4 lo suponemos igual a cero.

OBSERVACION.- La operación efectuada contiene un número limitado de divisiones, puesto que $A > B > r_1 > r_2$ ...... prueba que se debe llegar a un resto cero.

98. TEOREMA.- Todo divisor común de dos números es divisor de su m. c. d.

En efecto, refiriéndose al último ejemplo literal, si por n designamos un divisor común de A y B, por (94) n dividirá a r_1; dividiendo, pues, a B y r_1, será divisor de r_2 y continuando así justificaremos que n divide a r_3, o sea al m. c. d. de A y B.

RECIPROCAMENTE : Todo divisor del m. c. d. de dos números, es un divisor común de éstos.

Se deduce del teorema (94, recíproco), puesto que si n divide al m. c. d. $(A, B) = r_3$ dividirá a A y B, que son múltiplos de r_3.

99. TEOREMA. Si dos números se multiplican por un tercero o se dividen por un factor común a ambos, su m. c. d. quedará multiplicado por dicho número o dividido por el factor considerado.

En efecto : Si en el esquema que representa las operaciones hechas para hallar el m. c. d. de los números A y B se multiplican estos números por otro n, los restos r_1 r_2 ... aparecerán sucesivamente multiplicados por n; el m.cd. de los productos An y Bn será, pues, r_3 n.

Del mismo modo se ve que el m. c. d. de $A:n$ y $B:n$ es $r:n$.

COROLARIO. Si se dividen dos números por su m. c. d., los cocientes que se obtienen son primos entre sí.

Si m. c. d. $(A, B) = D$, se tendrá

$$\text{m. c. d. } (A:D,\ B:D) = D:D = 1$$

100. TEOREMA.- Si un número es divisor de un producto de dos factores y es primo con uno de ellos, será divisor del otro factor.

Sea el número C divisor del producto $A \times B$; decimos que si C es primo con A, necesariamente será divisor de B. En virtud de la hipótesis y del teorema anterior, se podrá escribir :

m. c. d. $(A,C) = 1$ y m. c. d. $(A.B,\ C.B) = 1 \times B = B$, puesto que el número C divide al producto $A.B$ por hipótesis y al $C.B$, será divisor de B, que es el m.c.d, de ellos.

Libertad Nuñez Santos

II. MINIMO COMUN MULTIPLO

101. Un número puede ser divisible por otros varios;en ese caso dicho número es un múltiplo común de todos ellos.

Un múltiplo común de varios números no puede ser inferior al mayor, y por lo tanto existitá siempre un múltiplo común , que será el menor de todos; a ese múltiplo se le llama mínimo común múltiplo y se designa por la notación m. c. m.

102 TEOREMA. Todo múltiplo de dos números es un producto de cuatro factores, que son : el máximo común divisor,los cocientes de dividir esos números por su m. c. d. y un factor indeterminado.

Sean los números A y B; llamemos d a su m. c. d., a y b a los cocientes de dividir A y B por d; tendremos :

$$A = d.a, \qquad B = d.b.$$

Si M es un múltiplo común de A y B, se podrá escribir por serlo de A la siguiente igualdad :

$$M = A.q = d.a.q. \quad (1)$$

Como el número M o su igual d. a. q, es múltiplo de B o de su igual b.d, resulta que d. a. q es divisible por d. b; se obtiene el cociente de estos números dividiendo d.aq primero por d(90, 4.^{o}) y volviendo a dividir el cociente a. q obtenido por b; esto prueba que el número a.q es divisible por b, pero como b es primo con a, queda probado que b será divisor de q y se podrá escribir :

$$q = b.q'$$

Substituyendo este valor de q en la igualdad (1), tendremos :

$$M = a.b.d.q'$$

Lo que prueba el teorema.

Dados los números A y B, quedan determinados los números d, a y b; el número q' puede recibir los valores de la serie natural; luego el m. c. m. corresponderá al menor valor de q' que es 1, y por lo tanto el m. c. m. (A, B) = a. b. d.

Todo múltiplo de dos números es, pues, múltiplo de su m. c. m. - El m. c. m. lo representaremos por m y se podrá escribir :

$$m = a.b.d = A.b = B.a \quad (2)$$

Luego : El m. c. m. de dos números se obtiene multiplicando uno de ellos por el cociente que resulta de dividir - el otro por el m. c. d. de ambos.

Todo múltiplo del mínimo común múltiplo, lo es de los números dados.

Se deduce, pues, que para formar todos los múltiplos comunes a dos números, bastará formar todos los múltiplos — del m. c. m. de ellos.

Puesto que el m. c. d. de 324 y 72 es 36, el mínimo-común múltiplo de esos números será :

$$m = 324 \times 2 = 72 \times 9 = 648$$

y la serie de los múltiplos comunes a 324 y 72 será :

$$648 \times 1, \quad 648 \times 2, \quad 648 \times 3....$$

Si multiplicamos por d los dos miembros de la igualdad- m = a.b.d, se tendrá m.d = (a.d) b.d) = A.B. (3)

Que nos dice : El producto del máximo común divisor por el mínimo común múltiplo de dos números es igual al producto de ellos.

De la igualdad (3), se deducen :

1ro. Si A y B son primos, d = I y por tanto m = A.B.

2do. Si A es divisible por B, d = B y por tanto m = A

Luego, si dos números son primos entre sí, su m.c. m. es igual a su producto y si dos números son divisibles uno por otro, el mayor es el m. c. m.

103. TEOREMA. Si dos números se multiplican por otro o se dividen por uno de sus factores, el m. c. m. quedará multiplicado por ese otro o dividido por ese factor.

Si los números A y B. se multiplican por n, los números que resultan A.n y B.n tienen por m. c. d., d.n, y por tanto, los cocientes de dividir estos números por d. n. siguen siendo a y b; por consiguiente, si m. c. m. (A, B) = A. b ; se tendrá :

$$\text{m. c. m.} \quad (A.n, \; B.n) = A.n\,.b = (A.b).n$$

como se quería probar.

Lo mismo se demuestra la otra parte del teorema.

104. TEOREMA. Si se divide el m. c. m. de dos números por cada uno de ellos, los cocientes que se obtienen son primos entre sí .

Porque si $m = A.b = B.a$, vemos que

$$m : A = (A.b) : A = b,$$

$$\text{y también} \quad m: B = (B.a) : B = a.$$

Son, pues, estos cocientes los mismos que se obtuvieron dividiendo los números por su m. c. d., y por tanto primos entre sí.

EJERCICIOS

1. Hallar el m. c. m. de los números 512 y 648; 594 y 8424, 68532 y 23451.
2. Hallar el m. c. m. de los números 160 y 90; 512 y 48.

3. Búsquense tres números menores que 10000 y que puedan dividirse sin residuo por 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9.

4. En una carretera hay postes telegráficos distribuidos de 45 en 45 metros. En un punto coincide uno de éstos, con

un poste kilométrico. A qué distancia de dicho punto vuelven a coincidir ?

5. Cuál debe ser la capacidad mínima de un tonel para que en él puedan vaciarse sucesivamente, llenándole por completo botellas de vino de 80 centílitros, 96 centílitros y litro ?

6. Dos hermanos, Pedro y Pablo, hacen una visita a su tío cada 15 y cada 18 días, respectivamente, y se encuentran el 20 de abril en casa del mismo. Dígase qué dia volverán a encontrarse y cuántas visitas habrá hecho cada uno.

7. Del puerto de Ciudad Trujillo salen dos vapores; uno para Puerto Rico y otro a New York; el primero hace los viajes cada 3 dias, el segundo cada 11 dias : El lunes 22 de Enero de 1951 salieron ambos a la vez. Que día volverán a salir juntos en un mismo lunes ?

8. Encontrar dos números sabiendo que su m. c. d. es 18 y su m. c. m. 5616.

9. Hallar dos números sabiendo que su producto es 58320 y su m. c. m. 3240.

CAPITULO III

N U M E R O S P R I M O S

I. DEFINICION Y PROPIEDADES

105. Todo número es divisible por sí mismo y por la unidad; cuando no admite otros divisores se llama número primo.

Un número primo, es primo con los demás, excepto con sus múltiplos.

El único divisor común que pueden tener es ese número primo y por hipótesis, ese número no es divisor del otro que se considera.

Un número primo, es primo con todos los inferiores a él.

Cuando varios números tomados de dos en dos, es decir, cada uno con uno cualquiera de los demás, no tienen más divisor común que la unidad, se dice que son primos entre sí dos a dos.

106. TEOREMA.- Todo número admite un factor primo.

Si el número es primo, el mismo será el divisor, Si no es primo y le llamamos N, por no ser primo, admitirá un divisor $N' < N$; si el número N' es primo, quedará demostrado el teorema, y si no lo es, admitirá un divisor $N'' < N'$; este divisor N'' lo será también de N múltiplo de N'; si N'' es primo, el teorema resulta demostrado, y si no lo fuera se continuaría hallando divisores N''' de N'', etc.
Esta operación es limitada y no se termina mientras no se encuentre un divisor primo, luego éste existe siempre.

COROLARIO.- Dos números a y b que no son primos entre sí tienen un divisor primo común.

En efecto : Los números a y b tendrán un máximo común divisor d, que será primo o admitirá un divisor primo y en ambos casos quedará probado lo que se desea.

TEOREMA.- La serie de los números primos es ilimitada.

En efecto : sean los números primos 1, 2, 3, 4, 5, 7, 11, etc. si se demuestra que dado un número primo cualquiera, existe otro mayor, no habrá duda de que los números primos forman una sucesión indefinida.

Llamemos p al mayor número primo que conocemos; formemos el producto $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \dots p = P$ de todos los números primos hasta él; sólo en el caso de ser $p = 2$, $P = p$: en todos los demás casos, $P > p$, luego agregando una unidad al producto P, siempre se verificará :

$$P + 1 > p.$$

Si el número $P + 1$ es primo, existe por lo menos un número primo mayor que p. Si $P + 1$ no es primo admitirá un divisor primo, que no puede ser ninguno de los que forman el producto P, pues si alguno de ellos dividiera a $P + 1$, como también es factor del producto P, tendría que ser divisor de la diferencia de estos números que es 1; los divisores primos de $P + 1$ tienen, pues, que ser mayores que p.

FORMACION DE UNA TABLA DE NUMEROS PRIMOS.-

No se conoce una fórmula generadora de los números primos y por esta razón tenemos que limitarnos a formar cuadros de números primos desde 1 hasta un límite dado; vamos a explicar el método seguido en la formación de esta tabla.

Supongamos escrita la serie natural hasta el 100; conservamos en ella los números 1 y 2 por ser primos; a partir del 2 tacharemos los números de dos en dos, con lo cual habremos prescindido de los números de la serie natural múltiplos de 2 el primer número que aparece sin tachar es el 3; este número es el primo que sigue al 2, puesto que no es divisible por él; a partir del 3 tacharemos los números de tres en tres, con lo cual habremos prescindido de los números múltiplos de 3; el primer número no tachado después del 3, es el 5; este es el número primo inmediatamente superior al 3, pues no admite ni el divisor 2 ni el 3; a partir del 5 se tachan de cinco en cinco, y el primer número que aparecerá sin tachar es el 7; éste será primo y a partir de él tacharemos de siete en siete, y así sucesivamente, debemos observar que al tachar de dos en dos, el primero que se tacha es el $4 = 2^2$; al tachar de tres en tres, el primero tachado es $3^2 = 9$ y en general, al tachar de p en p, el primero tachado es p^2. Supongamos para fijar ideas que se van a tachar de 17 en 17; todo número N múltiplo de 17 menor que 17^2 estará ya tachado, puesto -- que

$$N < 17 \times 17$$

siendo múltiplo de 17, será $N = 17 \times 12$, por ejemplo, y admitirá los factores primos del 12, que son menores que 17, y por lo tanto N está ya tachado.

Si queremos tener los números primos inferiores a 100, tacharemos de 2 en 2, de 3 en 3, hasta de 7 en 7, pues al ir a tachar de 11 en 11 y sucesivos, como el cuadrado de 11 es superior al 100, no se tachará ninguno.

108. TEOREMA.- Todo número no divisible por los números primos cuyos cuadrados no le excedan, será primo.

En efecto : Sea N un número de esas condiciones; tampoco será divisible por los números primos, cuyos cuadrados le exceden y por lo tanto será primo.

Si N fuese divisible por b, siendo $b \times b > N$, el cociente a de dividir N por b, sería menor que b y se podría escribir $N = b \times a$; el número N admitirá los factores primos de a y como $N > a^2$, sería divisible por un número primo cuyo cuadrado no le excede, lo cual es contrario al supuesto.

REGLA. Para conocer si un número dado es primo, se le - divide sucesivamente por todos los números primos, desde el 2 en adelante, y si se llega sin obtener cociente exacto a un cociente menor que el divisor, el número es primo.

Ejemplo : Sea el número 2311.

Este número no es divisible por 2, 3, 5, 7 ..... 43, 47,53 el cociente obtenido con este divisor es ya 43, menor que 53 y por lo tanto dicho número es primo.

109. TEOREMA. Todo número primo que es divisor de un -- producto de varios factores, divide por lo menos a uno de e-- llos.

Sea el número p divisor del producto $a \times b \times c \times d$.

Si p no es divisor de a, será primo con él y considerando al producto como compuesto de dos factores a y $(b \times c \times d)$

dividirá a este factor (100); si p no es divisor de b será primo con b y tendrá que dividir a c × d; y por último, si no divide a c será primo con c y dividirá a d.

COROLARIOS.- 1ro. Si un número primo divide a una potencia de un número tendrá que ser divisor de la base.

Si p divide a b^m, dividirá a b, pues b^m es un producto de m factores iguales a b.

2do. Si dos números son primos entre sí, sus potencias también lo serán.

Si a y b son primos entre sí, a^m y b^n serán también números primos entre sí, pues si no lo fueran admitirían un factor primo común que en virtud del primer Corolario sería divisor de las bases, contra lo supuesto.

110. TEOREMA.- Si un número cualquiera es primo con cada-uno de los factores de un producto, será primo con el producto, y recíprocamente.

Sea n un número primo con a, b, c y d, factores del producto, P = a.b.c.d; decimos que será primo con el producto: En efecto,

$$\text{m.c.d. } (n,a) = 1$$
$$\text{m.c.d. } (n,b) = 1$$
$$\text{m.c.d. } (n,c) = 1$$
$$\text{m.c.d. } (n,d) = 1$$

Si n y P no fuesen primos entre sí, admitirían un divisor común p, que en virtud del teorema anterior tendría — que dividir a uno por lo menos de los factores, al b por ejemplo, y por lo tanto no sería m. c. d. (n, b) = 1, contra el supuesto.

RECIPROCO.- Si n es primo con P, lo será con a, b, c y d separadamente.

En efecto : Si n y a no fueran primos entre sí, admitirían un divisor primo común (106) que llamaríamos p, que por dividir a a factor de P, dividiría a este número y por lo tanto n y P no serían primos entre sí, lo cual es contrario a la hipótesis.

111. TEOREMA. Si un número N es divisible por otros varios a, b, c y d primos entre sí dos a dos, lo será por su producto.

En efecto: por ser N divisible por a se podrá escribir, llamando N' al cociente de su división :

$$N = a.N' \quad (1)$$

Siendo N o su igual a.N' divisible por b y siendo b primo con a, será divisor de N' y llamando N'' al cociente de N' por b, se podrá escribir :

$$N' = b.N'' \quad (2)$$

multiplicando las igualdades (1) y (2) y suprimiendo de ambos miembros de la que resulta el factor N', se tendrá :

$$N = a.b.N'' \quad (3)$$

Siendo N o su igual a.b.N'' divisible por c y este número primo con a y b, y por lo tanto con su producto a.b, tendrá que ser divisor de N'', y por lo tanto,

$$N'' = c.N''' \quad (4)$$

Multiplicando las igualdades (3) y (4), resulta :

$$N = a.b.c.N'''$$

y razonando del mismo modo con el divisor d, tendremos:

$N = a.b.c.d.N^{IV}$ que prueba que el número N contiene al producto $a.b.c.d.N^{IV}$ veces y que el resto correspondiente es cero.

COROLARIO.- Como los números primos lo son siempre entre sí dos a dos, se podrá asegurar que cuando un número es divisible por otros primos, lo es por su producto.

Así la condición para que un número sea divisible por 15 será que lo sea por 3 y por 5 factores primos, cuyo producto es igual a 15.

II. DESCOMPOSICION DE UN NUMERO EN FACTORES PRIMOS.-

112.- TEOREMA .- Todo número es igual a un producto de factores primos.

Si el número dado N es primo, el teorema es evidente, pués se verificará :

$$N = 1 \times N$$

Si N no es primo admitirá un divisor primo a y llamando N' al cociente de dividir N por a, se podrá escribir :

$$N = a.N' \quad (1)$$

Si N' fuese un número primo, el teorema queda demostrado- si N' no es primo, admitirá un divisor primo b y llamando N'' al cociente de dividir N' por b, se escribirá :

$$N' = b.N'' \quad (2)$$

multiplicando las igualdades (1) y (2) miembro a miembro y suprimiendo el factor N' común a ambos miembros de la que resulta, se tendrá :

$$N = a.b.N''..$$

Así continuaremos y como los números $N > N' > N''$ .... forman una sucesión decreciente de cocientes y por lo tanto limitada, se llegará siempre a un cociente primo; si suponemos que éste es 1 se tendrá :

$$N = abcd .....i$$

El razonamiento anterior no excluye la posibilidad de que algunos factores primos sean iguales, y por lo tanto la forma factorial de un número descompuesto en factores primos será :

$$N = a^x \; b^y \; c^z \; ..... \; l^m$$

La descomposición de un número en factores primos es, como se vé, siempre posible y se efectúa del modo siguiente :

REGLA.- Para descomponer un número en factores primos, se divide por el menor factor primo distinto de 1; el cociente que resulte se divide por el menor factor primo de la misma condición y así se continúa hasta llegar a un cociente que sea la unidad.

Si se quiere descomponer el número 4620 en factores primos, la operación se dispone del modo siguiente :

4620	
2310	2
1155	3
385	5
77	7
11	11
1	

$$4620 = 2^2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11$$

113. TEOREMA.- Un número no admite dos descomposiciones en factores primos.-

Quedará probado este teorema, si se demuestra que dos productos, a.b.c.d y a'.b'.c'.d'.f.g. de factores primos, iguales los dos a un mismo número N son idénticos, es decir, que constan de los mismos factores y repetidos cada uno el mismo número de veces.-

En efecto, siendo iguales los productos al número N, se podrá escribir :

$$a.b.c.d = a'.b'.c'.d'.f.g \qquad (1)$$

Ahora bien : siendo a factor primo del primer miembro será también factor del segundo; luego dividirá por lo menos a uno de sus factores, por ejemplo, al a'; pero siendo éste también primo, no le puede dividir más que siendo igual a él; por tanto, a = a'; suprimiendo, pues, el acento de a en el segundo miembro y dividiendo por a, se tendrá :

$$b.c.d = b'.c'.d'. f.g$$

razonando del mismo modo se probará que $b = b'$ $c = c'$ y $d = d'$, y además $1 = fg$, lo cual prueba que $f = 1$ y $g = 1$, con lo cual queda demostrado el teorema enunciado.

CONDICIONES DE DIVISIBILIDAD Y POTENCIALIDAD

114.- TEOREMA. Para que un número sea divisible por otro, supuestos ambos descompuestos en factores primos, es necesario que todos los factores primos del divisor figuren en el dividendo con exponentes iguales o mayores.

Si N es divisible por N', se tendrá :

$$N = N'.Q$$

y por lo tanto la condición es necesaria, toda vez que N contendrá todos los factores primos de N' y además los de Q.

Que la condición es suficiente, quedará probado toda vez que, si se verifica, se podrá hacer del dividendo dos partes; una igual al divisor y la otra nos representará el cociente.

Ejemplo : $2^4 . 3^2 . 5$ será divisible por $2^3.3$, porque $2^4 . 3^2 .5 = (2^3 . 3).(2.3.5)$.

115. TEOREMA.- Si todos los exponentes de los factores primos de un número admiten un mismo divisor, ese número será potencia exacta de otro, de grado igual a ese divisor y recíprocamente.

Sea el número $N = a^4 b^6 c^{14}$

en el cual los exponentes 4, 6 y 14 de sus factores primos son divisibles por 2, se podrá escribir :

$$N = (a^2 b^3 c^7)^2 = N'^2$$

lo cual prueba que N es cuadrado perfecto.

Recíprocamente : Si se verifica

$$N = N'^2$$

se descompondrá el número N en factores primos, descomponiendo N' y multiplicando por 2 todos sus exponentes.

Si $N' = a^3\ b^4\ c^5$, $N = (a^3\ b^4\ c^5)^2 = a^6\ b^8\ c^{10}$

FORMACION DE TODOS LOS DIVISORES DE UN NUMERO

116.- La condición de divisibilidad de un número por otro cuando ambos están descompuestos en factores primos, justifica la siguiente regla para la formación de todos los divisores de un número.

Se escriben el 1 y las potencias sucesivas del primer factor primo; después se hace lo mismo con el segundo, y así hasta el último; se multiplica el primer grupo de números por cada uno de los del segundo; el conjunto de números que resulte se multiplica por cada uno de los del tercero y así sucesivamente; los números del último conjunto formado de ese modo será el de los divisores del número dado.-

Sea el número $360 = 2^3 . 3^2 . 5$.

La operación se dispone del modo siguiente :

(1)

$1 \quad 2 \quad 2^2 \quad 2^3$

$1 \quad 3 \quad 3^2$

$1 \quad 5$

Conjunto de números que resulta de la multiplicación de los números de la primera fila por cada uno de la segunda.

1	2	2^2	2^3
1×3	2×3	$2^2 \times 3$	$2^3 \times 3$
1×3^2	2×3^2	$2^2 \times 3^2$	$2^3 \times 3^2$

Conjunto que resulta de multiplicar los números anteriores por los números de la tercera fila.

1	2	2^2	2^3
1×3	2×3	$2^2 \times 3$	$2^3 \times 3$
1×3^2	2×3^2	$2^2 \times 3^2$	$2^3 \times 3^2$
1×5	2×5	$2^2 \times 5$	$2^3 \times 5$
$1 \times 3 \times 5$	$2 \times 3 \times 5$	$2^2 \times 3 \times 5$	$2^3 \times 3 \times 5$
$1 \times 3^2 \times 5$	$2 \times 3^2 \times 5$	$2^2 \times 3^2 \times 5$	$2^3 \times 3^2 \times 5$

que contiene todos los divisores.

La primera fila de (1) contiene $3+1$ números, la segunda $2+1$ y la tercera $1+1$; se ve, pues, que el número de factores será igual a $(3+1).(2+1).(1+1) = 24$.

Lo que nos dice que el número de factores de un número es igual al producto de los exponentes de sus factores primos, aumentando cada uno en una unidad.

MAXIMO COMUN DIVISOR Y MINIMO COMUN MULTIPLO DE LOS NUMEROS DESCOMPUESTOS EN FACTORES PRIMOS

117. TEOREMA. El máximo común divisor de dos o más números, es el producto de los FACTORES PRIMOS COMUNES a estos números afectados de los MENORES EXPONENTES.

Sean los números 360, 252 y 4620, descomponiéndolos en factores primos, tendremos :

$$4620 = 2^2 . 3 . 5 . 7 . 11.$$
$$360 = 2^3 . 3^2 . 5$$
$$252 = 2^2 . 3^2 . 7 .$$

decimos que : m.c.d $(360, 252, 4620) = 2^2 . 3 . = 12$.

El número $2^2 . 3$ es un divisor de los tres números dados - (114), pero es un divisor especial, pues contiene el mayor número de factores que pueden formar un divisor común afectados de los mayores exponentes, pues si al factor 2, por ejemplo, se le afectase de exponente 3, dejaría de ser divisor de los números 252 y 4620; luego es el máximo.

118. TEOREMA. El mínimo común múltiplo de dos o de varios números se forma con los FACTORES PRIMOS, SEAN O NO COMUNES afectados de los MAYORES EXPONENTES.

Así : m.c.m $(360, 252, 4620) = 2^3 . 3^2 . 5 . 7 . 11. = 27720$.

En efecto : El número $2^3 . 3^2 . 5 . 7 . 11.$ es un múltiplo común de los tres números dados, pero es un múltiplo especial, - pues contiene el menor número de factores primos que puede -- contener. (Cualquiera de ellos que faltase, el 5, por ejemplo dejaría de ser múltiplo de 360 y 4620 y si faltare el 11, dejaría de serlo de 4620); además, esos factores están afectados de los menores exponentes, pues si el exponente 3 del 2, por ejemplo, se rebaja en una unidad, dejará de ser múltiplo de 360; luego es el mínimo.

EJERCICIOS

1. Construir la tabla de los números inferiores a 200.
2. Averiguar si el número 5 731 es ó no primo.
3. Condición de divisibilidad de un número por 21 mediante su descomposición en factores primos.
4. Encontrar el número entero mas pequeño por el cual tenga que dividirse el número 110 250 para que resulte un cubo perfecto.
5. Hallar todos los divisores simples y compuestos de : 1925, y 1 383.

LIBRO — III

LAS FRACCIONES

--oOo--

CAPITULO PRIMERO

I. DEFINICIONES Y PROPIEDADES FUNDAMENTALES.

1. CALIDAD. Designamos con el nombre de calidad de una cosa, al conjunto de sus caracteres, marcas o señales. Así, todo objeto material, entre otros caracteres, posee un peso, una forma, un volúmen, etc. etc.

Por su calidad, las cosas se clasifican en homogéneas y heterogéneas, según que tengan la misma o diferente calidad.

2. ABSTRACCION. Los caracteres de las cosas no pueden separarse materialmente; pero sí, estamos dotados de la facultad de efectuar la operación mental que se llama abstracción que consiste en prescindir de cuantos caracteres no nos interesan tener presente en una cuestión determinada, reteniendo aquel o aquellos que sometemos a nuestra especial consideración y que por ésta razón, denominamos principales.

Por abstracción en los cuerpos materiales, podemos separar ya el caracter común del peso, ya el de su volúmen, o el de su dimensión longitud y así sucesivamente.

En ocasiones se separan de las cosas, grupos de caracteres comunes.

El caracter o grupo de caracteres que separamos de las cosas mentalmente mediante la abstracción, reciben el nombre de entes abstractos.

3. TAMAÑO. La idea de tamaño o grandor surge en nosotros, al comparar dos caracteres homogéneos y deducir de ello, si son iguales o desiguales; en este segundo caso, al caracter que abarca o comprende al otro, decimos que es mayor o más grande que ese otro, siendo este otro, menor o mas pequeño que el primero.

En el carácter peso, esta comparación la efectuamos mediante la balanza, deduciendo su igualdad o desigualdad, según que se equilibren o desequilibren los platillos. De un dolor al compararlo con otro, también podemos deducir su tamaño y asegurar cual es el mas grande o más pequeño.

El tamaño es una idea relativa, no absoluta. De ningún peso por ejemplo, se puede decir que es grande de un modo absoluto, puesto que dependerá nuestro calificativo del otro peso con el que se compara y así: El peso de un hombre, es grande con relación al de un insecto; pero muy pequeño si lo comparamos con el de nuestro planeta.

4. MAGNITUD. Desde de un punto de vista general, todo carácter que por comparación de dos de sus estados particulares, nos permita adquirir la idea de tamaño es una magnitud (Magnus, grande). El dolor, un afecto, un peso, un volumen, etc. son magnitudes; pero así como el carácter o magnitud dolor no podemos medirlo, el carácter o magnitud peso o volumen sí. Adoptando la clasificación de Beltrand Rusell, a las primeras las llamamos, magnitudes intensivas y a las segundas extensivas o matemáticas.

Son las magnitudes matemáticas las que han de constituir el objeto de nuestro estudio. Acabamos de exponer que todo caracter de las cosas medible es una magnitud matemática.

5. CANTIDAD; UNIDAD; NUMERO. Sus estados particulares, reciben el nombre de cantidades. Unidad es una cantidad que se elige como tipo de comparación, para determinar el tamaño de las demás, con relación a ella.

6. MEDIDA DE CANTIDADES. Medir una cantidad es compararla por cociente, (Quoties ? Cuántas veces ?) con una unidad. El resultado de esta operación es un número abstracto; número

es pues, el resultado de medir cantidades. Matemáticamente se anota la operación de medir una cantidad A con una unidad U como escribimos a continuación :

$$\frac{A}{U} = n \quad \text{de donde} \quad A = U.n$$

La operación de medir una cantidad de una magnitud, exige como condiciones previas el poder definir cuando 2 de estas cantidades son iguales y cuando una cantidad, es suma de otras. Ejemplo : La longitud de un segmento, la determina 5cm. o sea, que este segmento es la suma de cinco cantidades iguales a un centímetro.

7. MAGNITUD MATEMATICA. Magnitud matemática es todo carácter común de las cosas, entre cuyas cantidades se puede definir, la igualdad y la suma. La magnitud más importante la conocemos con el nombre de longitud, pues a ella podemos reducir mediante artificios adecuados las demás. Bastará para ello representar la unidad de la magnitud objeto de nuestro estudio, por el segmento rectilíneo que elijamos como unidad.

8. CLASES DE NUMEROS. Hemos dicho, que número, es el resultado de medir una cantidad o sea de compararla con la unidad. En esta operación se nos pueden presentar tres casos, que lo vamos a analizar, midiendo longitudes.

1ro. Que la cantidad AB (fig.1ra.) contenga exactamente a la unidad CD se expresa esta medición así :

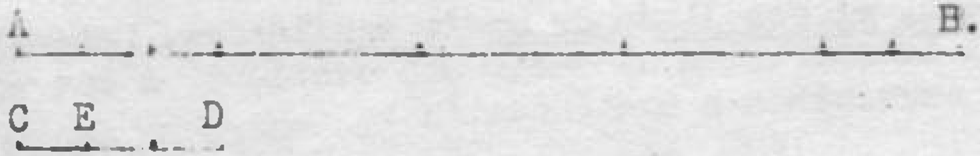
A ———————————————— B

C ———— D $\qquad \frac{AB}{CD} = 4$

dando como resultado un número natural, en nuestro ejemplo el 4.

2do. Que no contenga AB a la unidad CD (fig.2da.);pero si a una de las partes iguales o alícuotas de CD por ejemplo a la tercera parte de CD, 14 veces; entonces, si la tercera parte de CD es :

$$\frac{CD}{3} = CE$$



o sea que $AB = 14 \times CE = 14 \times \frac{CD}{3}$. Del examen de esta última relación deducimos, que en la determinación de AB o medida intervienen dos números naturales, uno el 14 que numera o cuenta y el otro, el 3 que indica las partes iguales que se han hecho de la unidad y que la denomina como tercio de ella. Apoyados en este análisis, con nuestra razón, formamos el nuevo número fraccionario (fractus, roto) que escribimos así:

$\frac{14}{3}$ pudiendo anotar la medida como sigue:

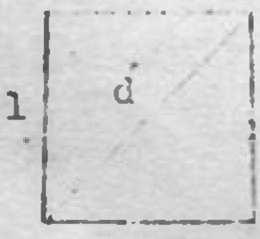
$$\frac{AB}{CD} = \frac{14}{3}$$

El resultado en este caso, es un número racional fraccionario.

3er. caso. Nuestra razón ha descubierto, lo que no pueden mostrarnos nuestros sentidos, y es, que existen longitudes que no contienen a la unidad ni a ninguna de sus partes alícuotas, dando origen a un nuevo resultado-número, que recibe el nombre de número inconmensurable o irracional.

De éstos números, trataremos mas adelante poniendo ahora como ejemplo que ya estudiaremos, el de la medida de la diagonal de un cuadrado con su lado como unidad, que se expresa por el símbolo $\sqrt{2}$ (raíz cuadrada de dos.).

9.- UNIDADES FRACCIONARIAS. Si la unidad se divide en 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, etc. partes iguales, las unidades fraccionarias correspondientes reciben el nombre de medios, tercios, cuartos, quintos, sextos, séptimos, octavos, novenos, décimos, once-avos, doce-avos, y así, sucesivamente, pues desde 11 partes en adelante la unidad fraccionaria se expresa anunciando el número de partes en que se



$$\frac{d}{1} = \sqrt{2}$$

ha dividido la unidad entera, seguida de la terminación avos.

10. Las unidades fraccionarias se escriben con un 1 separado por una rayita horizontal del número, que indica las partes que se hicieron de la unidad.

Así : $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \frac{1}{9}, \frac{1}{10}, \frac{1}{11}$....

La cantidad AB de nuestro ejemplo, sería igual, pues, a 14 veces $\frac{1}{3}$ de CD.

11. Número quebrado o fracción es la expresión de un conjunto de partes iguales de la unidad, mediante dos números enteros; uno llamado NUMERADOR, que indica el número de unidades fraccionarias; otro llamado DENOMINADOR, que indica el número de partes en que la unidad se ha dividido.

12. Se escribe un quebrado, separando el numerador del denominador por una rayita horizontal y se lee, leyendo primero el numerador y después el denominador seguido de la terminación avos. El numerador y denominador se llaman términos del quebrado.

Así diremos que AB es 14 tercios de CD, se escribe $\frac{14}{3}$.

13. Si el numerador de una fracción es menor que el denominador, la cantidad que expresa es menor que la unidad; si sucede lo contrario, la fracción es mayor que la unidad y si ambos términos son iguales, la fracción es igual a la unidad entera.

Así : $\frac{3}{5} < 1, \quad \frac{8}{5} > 1, \quad \frac{5}{5} = 1$

14. Generalizando este modo de expresión, pueden comprenderse en él los números enteros, y decir :

$$\frac{5}{1} = 5$$

Todo número entero puede considerarse como un quebrado cuyo denominador es la unidad.

Las fracciones:

$$\frac{1}{3} < \frac{2}{3} < \frac{3}{3} < \frac{4}{3} < \frac{5}{3}$$ ...forman una serie creciente.

Las fracciones $\frac{5}{1} > \frac{5}{2} > \frac{5}{3} > \frac{5}{4} > \frac{5}{5} > \frac{5}{6}$.. forman una serie decreciente.

En el primer caso, es igual para todos la unidad fraccionaria, y por lo tanto es mayor la cantidad que contiene mayor número de unidades fraccionarias; en el segundo, la unidad fraccionaria va disminuyendo, porque el número de partes que se hacen de la unidad entera va aumentando, y como se toma en todas el mismo número de unidades fraccionarias, cada fracción será mayor que la siguiente.

15. Las fracciones menores que la unidad se suelen llamar propias y las mayores impropias.

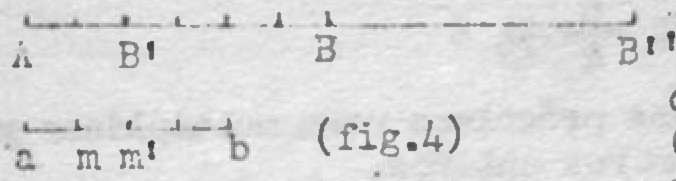
Dos fracciones que tienen los mismos términos, aunque invertidos, se llaman inversas una de otra. Así: $\frac{3}{7}$ y $\frac{7}{3}$

Número fraccionario es la expresión de un conjunto de unidades enteras
dades enteras y fraccionarias. Así: $3 + \frac{2}{5} + \frac{8}{6} + 4 + \frac{2}{9}$

Casos particulares de este número son las fracciones ya definidas y el número mixto.

Se llama número mixto al compuesto de un entero y de un quebrado propio. Así: $3 + \frac{2}{5} = 3\frac{2}{5}$

PROPIEDADES DE LAS FRACCIONES.- Cuando el numerador de una fracción se hace un cierto número de veces mayor o menor, es decir, cuando se multiplica por un número entero o se divide por uno de sus factores, la fracción se hace el mismo número de veces mayor o menor, o, lo que es igual, queda multiplicada o dividida por dicho número.



(fig.4)

Sea la fracción $\frac{6}{4}$ que corresponde a la longitud A B, (fig. 4ta) siendo ab la unidad entera elegida; si multiplicamos su numerador por 3 se forma la fracción $\frac{6x3}{4} = \frac{18}{4} = \frac{6}{4} + \frac{6}{4} + \frac{6}{4} = \frac{6}{4} \times 3.$

Si dividimos el numerador por 2, se forma la fracción,

$$\frac{6 : 2}{4} = \frac{3}{4} = \text{la mitad de } \frac{6}{4} = \frac{6}{4} : 2$$

16. Si el denominador de una fracción se multiplica por un número entero o se divide por uno de sus factores, la fracción queda dividida o multiplicada por ese número.- Sea la fracción $\frac{6}{4}$ si multiplicamos por 3 el denominador, se forma esta otra $\frac{6}{4 \times 3} = \frac{6}{12}$; se obtiene $\frac{1}{21}$ dividiendo en tres partes iguales un $\frac{1}{4}$ como se ve en la figura 4ta. luego el quebrado $\frac{6}{12}$ corresponde a la longitud A B', que es precisamente la tercera parte de A B, o lo que es igual, el quebrado $\frac{6}{12}$ es la tercera parte del $\frac{6}{4}$ se tiene, pues: $\frac{6}{4} : 3 = \frac{6}{4.3} = \frac{6}{12}$. Si dividimos el denominador de la fracción propuesta por 2, se tendrá la fracción $\frac{6}{2}$ que decimos es doble de $\frac{6}{4}$; cuando se tiene dividida la unidad en cuatro partes iguales y se quiere dividir en dos, basta considerar reunidas dos de aquellas, como se ve en la figura 4, en donde :

$$am = \frac{1}{4} \; ; \; AB = \frac{6}{4} \text{ y } am' = am + am = \frac{1}{2}$$

Es decir, que AB contiene 6 veces a am, luego contendrá sólo tres veces a am', lo que nos dice que será precisa una longitud igual a 2 AB = AB'', para formar 6 am', es decir $\frac{6}{2}$ o sea :

$$\frac{6}{4:2} = \frac{6}{2} = \frac{6}{4} \times 2$$

De lo dicho se deducen reglas prácticas para multiplicar y para dividir fracciones por números enteros.

17. 1ro. Para multiplicar una fracción por un número entero, se multiplica el numerador por el entero y a este producto se le pone el denominador de la fracción; si el entero es divisor del denominador, es mas conveniente dividir el denominador por el entero, dejando el mismo numerador.

18. 2do. Para dividir una fracción por un número entero, se multiplica el denominador de la fracción por el entero, dejando el mismo numerador; si el número es divisor del numerador, conviene dividir el numerador por el entero, dejando el mismo denominador. Así :

$$\frac{3}{4} \times 7 = \frac{3 \times 7}{4} = \frac{21}{4} \; ; \quad \frac{3}{5} : 8 = \frac{3}{5 \times 8} = \frac{3}{40}$$

$$\frac{3}{28} \times 7 = \frac{3}{28:7} = \frac{3}{4} \; ; \quad \frac{15}{3} : 5 = \frac{15:5}{3} = \frac{3}{3} = 1$$

19. Si los dos términos de un quebrado se multiplican por un mismo número, el quebrado no varía de valor. Así :

$$\frac{3}{5} = \frac{3 \times 4}{5 \times 4}$$

Se transforma el quebrado $\frac{3}{5}$ en $\frac{3 \times 4}{5 \times 4}$ haciendo dos operaciones simultáneas; si multiplicamos primero por 4 el numerador, se forma el quebrado :

$$\frac{3 \times 4}{5}$$

que es cuatro veces mayor-que $\frac{3}{5}$ y si multiplicamos el denominador de $\frac{3 \times 4}{5}$ por 4, se forma $\frac{3 \times 4}{5 \times 4}$ que es cuatro veces menor que él y por lo tanto igual a $\frac{3}{5}$

20. Si los dos términos de un quebrado se dividen por un factor común a ambos, el quebrado que resulta es igual al propuesto.

Así: $\frac{20}{15} = \frac{20:5}{15:5} = \frac{4}{3}$

Se demuestra como el anterior.

COCIENTE EXACTO DE NUMEROS ENTEROS

21. Definido el cociente de dos números, diciendo que es otro número que multiplicado por el divisor reproduce el dividendo, es fácil ver que el cociente de dos números enteros es una fracción cuyo numerador es el dividendo y cuyo denominador es el divisor; porque, en efecto,

$$\frac{3}{5} \times 5 = \frac{3}{5:5} = \frac{3}{1} = 3$$

lo cual quiere decir que $3 : 5 = \frac{3}{5}$

Esto está de acuerdo con el concepto de la división, como operación de dividir el dividendo entre las unidades del divisor, pues si 1 dividido o distribuído entre 3 es igual a $\frac{1}{3}$, 8 distribuído o dividido por 3 será $\frac{8}{3}$ y por lo tanto. $\frac{8}{3} + \frac{8}{3} + \frac{8}{3} = \frac{8}{3} \times 3 = 8$ (dividendo distribuído)

Resulta, pues, que si se desea hallar el cociente de dos números 19 y 5 por ejemplo, ese cociente será $\frac{19}{5}$ o sea 3 unidades $\frac{4}{5}$ y se podrá escribir:

$$19:5 = \frac{19}{5} = 3\ \frac{4}{5}$$

El número entero 3 que resulta de ver las veces que 19 contiene a 5, es lo que llamamos ya, cociente entero; y el número 4 es el resto de esa división.

22. Se obtiene, pues, el cociente exacto agregando al cociente entero, un quebrado cuyo numerador es el resto y el denominador el divisor.

Siguiendo esa regla, se transforma un quebrado impropio en número mixto.

23. La transformación inversa, o sea la de convertir un número mixto en fracción impropia, se hará transformando el número entero en fracción de denominador igual al de la fracción y agregando las unidades fraccionarias de ésta.

Así diremos : $5\frac{3}{4} = \frac{20}{4} + \frac{3}{4} = \frac{23}{4}$

Toda vez que 5 unidades contienen $\frac{20}{4}$ de unidad, puesto que $1 = \frac{4}{4}$.

24. Para reducir un mixto a quebrado se multiplica el entero por el denominador del quebrado; a este producto se le agrega el numerador y a la suma se le pone el denominador del quebrado.

SIMPLIFICACION DE FRACCIONES

25. Puesto que según hemos visto, no se altera el valor de una fracción, multiplicando o dividiendo sus dos términos por un mismo número, es claro que existirán muchas fraccio-

nes iguales con diferentes términos; la de menores términos de todas ellas, se llama fracción irreducible.

26. TEOREMA.- Si una fracción tiene sus dos términos primos entre sí, toda fracción igual a ella los tendrá equimúltiplos de la dada.

Sea la fracción $\frac{2}{7}$ cuyos términos 2 y 7 son primos entre sí; si representamos por $\frac{a}{b}$ una fracción igual a ella, se tendrá:

$$\frac{2}{7} = \frac{a}{b}$$

Los dos miembros de esta igualdad se pueden multiplicar por b y puesto que el producto de un quebrado por su denominador es igual al numerador, se podrá escribir:

$$\frac{2 \times b}{7} = a$$

Esta igualdad prueba, puesto que a es un número entero, que el cociente de dividir $2 \times b$ por 7 es exacto, o, lo que es igual, que 7 es divisor del producto $2 \times b$, y como es primo con 2, tendrá que ser divisor de b llamando c al cociente de dividir b por 7, tendremos:

$$b = 7 \times c, \text{ y por tanto, } a = \frac{2 \times 7 \times c}{7} = 2 \times c.$$

Lo cual prueba el teorema.

27. La fracción irreducible igual a una dada, se obtendrá, pues, dividiendo sus dos términos por el m. c. d. de ambos.

La serie indefinida de fracciones iguales a una dada, se obtendrá hallando primero la irreducible correspondiente y multiplicando los dos términos de ésta por la serie natural.

REDUCCION DE FRACCIONES A UN COMUN DENOMINADOR

28. Reducir fracciones a un común denominador, es transfor-

marlas en otras iguales, que tengan todas el mismo denominador.

Si tenemos dos fracciones $\frac{3}{5}$ y $\frac{6}{7}$ y multiplicamos los dos términos de la primera por 7 y los dos de la segunda por 5, se obtendrán las fracciones $\frac{3 \times 7}{5 \times 7}$ y $\frac{6 \times 5}{7 \times 5}$ que son iguales a las dadas y que tienen el mismo denominador.

29. Si las fracciones que queremos reducir a un común denominador son varias, se multiplicarán los dos términos de cada una por el producto de los denominadores de las demás. El denominador común será el producto de los denominadores, de todas las fracciones dadas.

30. El método anterior recibe el nombre de ordinario; — cuando se quiere además que el denominador común sea el menor posible, se sigue el método llamado del mínimo común múltiplo.

Este método consiste en simplificar las fracciones de modo que sean irreducibles; se halla el m. c. m. de los denominadores de éstas y se multiplican los dos términos de cada fracción por el cociente de dividir dicho mínimo común múltiplo por su denominador.

Ejemplos: Reducir a un común denominador las fracciones

$$\frac{3}{6}, \quad \frac{15}{12} \quad y \quad \frac{2}{5}$$

31. METODO ORDINARIO.— Sean las fracciones $\frac{3}{6}, \frac{15}{12}, \frac{2}{5}$ que queremos reducir a un común denominador; se tendrá:

$$\frac{3}{6} = \frac{3x12x5}{6x12x5}; \quad \frac{15}{12} = \frac{15x6x5}{12x6x5}; \quad \frac{2}{5} = \frac{2x6x12}{5x6x12}$$

Método del m. c. m.

Se simplifican las fracciones

$$\frac{3}{6} = \frac{1}{2}; \quad \frac{15}{12} = \frac{5}{4}; \quad \frac{2}{5} = \frac{2}{5}.$$

Se halla el m. c. m. de los denominadores de las fracciones irreducibles: m. c. m. $(2, 4, 5) = 2^2 \times 5 = 20$

Se multiplican los dos términos de la primera por 10, los de la segunda por 5 y los de la tercera por 4, que son los cocientes de dividir el m. c. m. 20, por 2, 4 y 5 respectivamente y tendremos:

$$\frac{1}{2} = \frac{10}{20}\ ;\ \frac{5}{4} = \frac{25}{20}\ ;\ \frac{2}{5} = \frac{8}{20}$$

El denominador común obtenido por este método, es fácil ver que es el mínimo; porque, en efecto, siendo irreducibles las fracciones $\frac{1}{2}$, $\frac{5}{4}$, $\frac{2}{5}$ y habiendo de ser las obtenidas iguales a ellas, el denominador común tiene que ser un múltiplo común de 2, 4 y 5; luego el menor será el m. c. m.

EJERCICIOS.

I. Hallar todas las fracciones iguales a $\frac{8}{9}$ de denominador inferior a 31.

II. Transformar en fracciones los números mixtos :

$$5\frac{2}{7}\ ;\ 4\frac{8}{10}\ ;\ 6\frac{2}{9}$$

III. Extraer los enteros de $\frac{165}{17}$; $\frac{434}{192}$; $\frac{357}{27}$

IV. Simplificar las fracciones :

$$\frac{36}{33}\ ;\ \frac{165}{120}\ ;\ \frac{225}{135}\ ;\ \frac{1255}{2205}$$

V. Reducir al mínimo denominador común :

$$\frac{15}{21} \text{ y } \frac{14}{35}$$

VI. Cuál de las fracciones es mayor : $\frac{4}{7}$ ó $\frac{5}{8}$

CAPITULO II

OPERACIONES CON LAS FRACCIONES

I. ADICION Y SUSTRACCION

Con las fracciones se efectúan las mismas operaciones que con los enteros y las definiciones y notaciones se conservan

32. Adición de fracciones es una operación que tiene por objeto reunir en una sola las unidades fraccionarias que contienen otras varias.

33. Se pueden presentar varios casos:

1o Sumar quebrados de igual denominador.

Sean los quebrados $\frac{3}{4}, \frac{5}{4}, \frac{7}{4}$ los que vamos a sumar.

Evidentemente, para obtener el resultado, se suman los numeradores y a la suma se le pone por denominador el común a todos ellos.

Luego: $\frac{3}{4} + \frac{5}{4} + \frac{7}{4} = \frac{3 + 5 + 7}{4} = \frac{15}{4}$

2o Sumar quebrados de distinto denominador.

Sean los quebrados $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{5}$ y $\frac{7}{10}$.

Como es fácil reducirlos a un común denominador, la operación queda reducida a la aplicación del 1er. caso, y se dispone del modo siguiente:

$$\frac{3}{4} + \frac{2}{5} + \frac{7}{10} = \frac{3 \times 5 \times 10}{4 \times 5 \times 10} + \frac{2 \times 4 \times 10}{5 \times 4 \times 10} +$$

$$\frac{7 \times 4 \times 5}{10 \times 4 \times 5} = \frac{150}{200} + \frac{80}{200} + \frac{140}{200} = \frac{150 + 80 \times 140}{200}$$

$$\frac{370}{200} = \frac{37}{20} = 1\frac{17}{20}$$

Si se reducen los quebrados a un común denominador por el método del m. c. m., se tendrá:

$$\text{m. c. m. } (4, 5, 10) = 20.$$

$$\frac{3}{4}+\frac{2}{5}+\frac{7}{10}=\frac{15}{20}+\frac{8}{20}+\frac{14}{20}=\frac{37}{20}=1\frac{17}{20}.$$

34. Sumar números mixtos. Para hallar la suma en este caso se pudieran reducir los mixtos a quebrados, pero es más práctico sumar separadamente los quebrados y después los enteros; adicionar a la suma de éstos las unidades que puedan resultar de la suma de aquéllos y por último, reunir ambas sumas.

$$3\frac{3}{4}+6\frac{2}{5}+8$$

Se tiene: $\frac{3}{4}+\frac{2}{5}=\frac{15}{20}+\frac{8}{20}=\frac{23}{20}=1\frac{3}{20}$

$$3+6+8=17.$$

Luego la suma igual será: $18\frac{3}{20}$

35. SUSTRACCION DE FRACCIONES.- Esta operación tiene con las fracciones la misma finalidad que con los enteros y se define, por lo tanto: Dados dos quebrados que se llaman minuendo y sustraendo, hallar otro llamado resto, que, sumado con el sustraendo, reproduzca el minuendo.

36. Se distinguen tres casos:

1o. Restar quebrados de igual denominador.

Sean éstos $\frac{5}{6}$ y $\frac{3}{6}$.

Evidentemente, para hallar el resto, se halla la diferencia entre los numeradores y se le pone por denominador el común al minuendo y sustraendo.

La operación se dispone así:

$$\frac{5}{6}-\frac{3}{6}=\frac{5-3}{6}=\frac{2}{6}$$

2o. Restar quebrados de distinto denominador. Como es fácil reducir las fracciones a un común denominador, la operación queda reducida a la aplicación de la regla dada para el 1er caso.

Así: $\frac{7}{10}-\frac{2}{5}=\frac{35}{50}-\frac{20}{50}=\frac{15}{50}$

3o. Restar dos números mixtos. Siempre será posible reducirles a quebrados y aplicar las reglas anteriores; pero es preferible restar primero las fracciones y después los enteros y reunir ambas diferencias.- Si al aplicar esta regla nos encontramos con que la fracción del minuendo es menor que la del sustraendo, no habrá dificultad por ello, pues bastará agregar a aquélla fracción una unidad del entero, descompuesta en unidades fraccionarias de su denominador.

Así: $5\frac{3}{4}-2\frac{4}{7}$

Se tiene: $\frac{3}{4}-\frac{4}{7}=\frac{21}{28}-\frac{16}{28}=\frac{5}{28}$; $5-2=3$ y por tanto

$$5\frac{3}{4}-2\frac{4}{7}=3\frac{5}{28}.$$

Otro ejemplo: $5\frac{4}{7}-3\frac{3}{4}$

Como la fracción $\frac{4}{7}$ es menor que $\frac{3}{4}$ agregaremos a $\frac{4}{7}$ una unidad separada del entero 5, descompuesta en siete séptimos y tendremos:

$$\frac{11}{7} - \frac{3}{4} = \frac{44}{28} - \frac{21}{28} = \frac{23}{28}$$

$4 - 3 = 1$, y por tanto,

$$5\frac{4}{7} - 3\frac{3}{4} = 1\frac{23}{28}.$$

II. VARIACIONES DE UNA FRACCION POR SUMAS Y DIFERENCIAS DE NUMEROS ENTEROS A SUS DOS TERMINOS.

37. La fracción a cuyos términos queremos sumar un mismo número, puede ser mayor o menor que la unidad, es decir puede tener un numerador mayor o menor que su denominador.

Vamos a probar que en los dos casos la operación a la cual la fracción se somete la transforma en otra más próxima a la unidad.

38. TEOREMA.- Si a los dos términos de una fracción menor que la unidad se les suma un mismo número, la fracción varía, aproximándose a la unidad, y por consiguiente aumenta.

Sea la fracción $\frac{a}{b} < 1$, y por consiguiente $a < b$.

La fracción $\frac{a+m}{b+m}$ será evidentemente menor que la unidad, y para probar que es mayor que la propuesta, bastará ver la posibilidad de restar de $\frac{a+m}{b+m}$ la $\frac{a}{b}$

En efecto, $\frac{a+m}{b+m} - \frac{a}{b} = \frac{bm - am}{(b+m).b}$ posible, puesto que $bm > am$.

Cuando el número m es muy grande, la diferencia entre 1 y $\frac{a+m}{b+m}$ es un número muy pequeño.

39. TEOREMA.- Si a los dos términos de una fracción mayor que la unidad se les suma un mismo número, la fracción varía y se aproxima a la unidad y por lo tanto disminuye.

Sea la fracción $\frac{a}{b} > 1$ y por lo tanto $a > b$.

Si a los dos términos les sumamos el número m se tendrá la fracción $\frac{a+m}{b+m}$ que evidentemente es mayor que 1, pues si $a > b$, $a + m$ será mayor que $b + m$; hay que probar la siguiente desigualdad:

$$\frac{a}{b} > \frac{a+m}{b+m}$$

Esto se conseguirá viendo que es posible la sustracción siguiente:

$$\frac{a}{b} - \frac{a+m}{b+m} = \frac{a.m - b.m}{b(b+m)}$$; posible puesto que

$$am > bm.$$

40. TEOREMA.- Si de los dos términos de una fracción impropia se resta un mismo número, la fracción varía y se aleja de la unidad, es decir, aumenta. Si la fracción dada es propia, tambien se aleja, y por lo tanto disminuye.

En la aplicación de esta propiedad, se debe tener presente que los números que se restan de ambos términos no pueden ser superiores a ellos.

Las demostraciones son en un todo idénticas a las dadas para el caso de la operación directa.

41. Ocurre con frecuencia tener que sumar término a término dos fracciones; es decir, a los dos términos de una frac

ción, respectivamente, los dos de otra; la fracción resultante en ese caso tiene la propiedad de estar comprendida entre las dadas; es decir, que es mayor que la menor de ellas y menor que la mayor. Sean las fracciones $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$; decimos — que la fracción $\frac{a+c}{b+d}$ se hallará comprendida entre las dadas; es decir, que se verificará :

$$\frac{a}{b} > \frac{a+c}{b+d} > \frac{c}{d}$$

En efecto: para probar que $\frac{a}{b} > \frac{a+c}{b+d}$ bastará reducirlas a un común denominador y ver que el numerador de la primera es mayor que el de la segunda; así:

$$\frac{a}{b} = \frac{a\,(b+d)}{b\,(b+d)} \qquad a(b+d) = ab + ad$$

$$\frac{a+c}{b+d} = \frac{(a+c).b}{(b+d).\ b} \qquad (a+c).b = ab + cb$$

Luego todo queda reducido a demostrar que $ad > cb$; y en efecto, puesto que $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$, reduciendo a un común denominador se ve que $ad > cb$.

Del mismo modo se demostrará que $\frac{a+c}{b+d} > \frac{c}{d}$.

En particular: Si las fracciones dadas son iguales, la fracción resultante es igual a ellas. Así, si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ se tendrá

$$\frac{a+c}{b+d}=\frac{a}{b}=\frac{c}{d}.$$

Si en vez de ser dos fracciones iguales, fueran varias, por la misma razón se verifica que la fracción cuyo numerador es la suma de los numeradores de las fracciones dadas y cuyo denominador es la suma de sus denominadores, es igual a estas fracciones.

Así, si $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}$,

se tendrá $\frac{a+c+e}{b+d+f}=\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}$,

III. MULTIPLICACION DE FRACCIONES

42. La multiplicación de fracciones, es una operación -- que tiene por objeto dados dos números llamados multiplicando y multiplicador, hallar un tercero llamado producto, que esté formado con el multiplicando, como el multiplicador se supone formado con la unidad.

Así, el producto $\frac{3}{4} \times \frac{5}{7}$, quiere decir, que se ha de hallar un número que sea las cinco séptimas partes de tres cuartos, porque $\frac{5}{7}$ es las cinco séptimas partes de la unidad.

Distinguiremos varios casos:
1o. Multiplicar dos fracciones.
2o. Multiplicar una fracción por un entero y viceversa.
3o. Multiplicar dos números mixtos.

CASO 1o. Sean las fracciones $\frac{3}{4}$ (multiplicando) $\frac{5}{7}$

(multiplicador). La cuestión, como sabemos, queda reducida a hallar las cinco séptimas partes de $\frac{3}{4}$; sabemos hallar una -- séptima parte, pues ya hemos visto que si el denominador de un quebrado se multiplica por un número, dicho quebrado queda dividido por él, luego $\frac{3}{4 \times 7}$ será $\frac{1}{7}$ de $\frac{3}{4}$: y ahora para hallar cinco séptimos de $\frac{3}{4}$ bastará hacer la expresión un $\frac{1}{7}$ de $\frac{3}{4}$ cinco veces mayor, o lo que es igual, multiplicar su numerador por 5. Así resulta:

$$\frac{3}{4} \times \frac{5}{7} = \frac{3 \times 5}{4 \times 7}$$

Luego: Para multiplicar dos quebrados se multiplican los numeradores y los denominadores y el resultado será un quebrado que tiene por numerador el primer producto y por denominador el segundo.- En particular: El producto de dos fracciones inversas es igual a la unidad.

CASO 2o. Multiplicar un quebrado por un entero o un entero por un quebrado.

Sea por ejemplo $3 \times \frac{5}{7}$: Si al número entero se le considera como un quebrado, cuyo denominador es la unidad, tendremos:

$$3 \times \frac{5}{7} = \frac{3}{1} \times \frac{5}{7} = \frac{3 \times 5}{1 \times 7} = \frac{3 \times 5}{7}$$

Que nos dice que : Para multiplicar un entero por un quebrado o un quebrado por un entero, se multiplica el entero por el numerador, dejando el mismo denominador.

CASO 3o. Multiplicar dos números mixtos. Pudieran considerarse dichos números mixtos como dos sumas indicadas y ejecutar la operación como tales, pero es más fácil reducirlos a quebrados y multiplicarlos como éstos:

Así : $2\frac{4}{5} \times 3\frac{1}{4} = \frac{14}{5} \times \frac{13}{4} = \frac{14 \times 13}{5 \times 4}.$

ESCOLIO.- Por las reglas dadas, se ve que en todos los casos se puede tomar el multiplicando por multiplicador y éste por multiplicando, sin que el producto varíe.

43. PRODUCTO DE VARIOS FACTORES FRACCIONARIOS.

La expresión $\frac{3}{4} \times \frac{2}{5} \times \frac{1}{7} \times \frac{9}{10}$, quiere decir que el resultado de multiplicar $\frac{4}{3} \times \frac{2}{5}$ se ha de multiplicar por $\frac{1}{7}$ y el nuevo resultado por $\frac{9}{10}$.

Para efectuar, pues, la operación, se formará un quebrado, que tenga por numerador el producto de los numeradores y por denominador el producto de los denominadores.

$$\frac{3}{4} \times \frac{2}{5} \times \frac{1}{7} \times \frac{9}{10} = \frac{3 \times 2 \times 1 \times 9}{4 \times 5 \times 7 \times 10}$$

Se ve tambien que el orden en que se consideran los factores no altera el resultado; toda vez que en virtud de la propiedad(Unif)siempre resultarán como productos, fracciones que tendrán el mismo numerador, y el mismo denominador.

Tambien se ve fácilmente que si algunos factores fueran números mixtos se reducirían a quebrados y si fueran enteros se les podría suponer por denominador la unidad.

44. En general, las operaciones con números implícitos en que intervengan productos cuyos factores sean fracciones, se efectúan siguiendo las reglas que se dieron para el caso en que todos eran enteros.

Así: Se multiplica un producto por una fracción multiplicando por ella uno cualquiera de sus factores.

Ejemplo: $\left(\frac{2}{3} \times 7 \times \frac{4}{9} \times 2\frac{3}{4}\right) \times \frac{6}{5}$

$$\frac{2}{3} \times 7 \times \left(\frac{4}{9} \times \frac{6}{5}\right) \times 2\frac{3}{4}$$

En el cual aparece el factor $\frac{4}{9}$ multiplicado por $\frac{6}{5}$

IV. POTENCIACION DE LAS FRACCIONES

45. La definición de potencia de un número se aplica sin modificación al caso en que la base sea una fracción.

Así: $\left(\frac{2}{5}\right)^4 = \frac{2}{5} \times \frac{2}{5} \times \frac{2}{5} \times \frac{2}{5}$

46. La potencia de una fracción se forma elevando sus dos términos a la potencia que indique su grado.

Así: $\left(\frac{2}{5}\right)^4 = \frac{2}{5} \times \frac{2}{5} \times \frac{2}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{2 \times 2 \times 2 \times 2}{5 \times 5 \times 5 \times 5} = \frac{2^4}{5^4}$

La potencia de un número mixto se obtiene reduciendole a fracción y aplicando la regla anterior.

Así: $\left(2\frac{3}{4}\right)^5 = \left(\frac{11}{4}\right)^5 = \frac{11^5}{4^5}$

La manera de operar con números implícitos, dados bajo la forma de potencia es independiente de la forma entera o fraccionaria de la base.

Por ejemplo: La multiplicación de dos potencias de una misma base fraccionaria, se hace sumando los exponentes y dejando la misma base.

Así : $\left(\frac{3}{5}\right)^4 \times \left(\frac{3}{5}\right)^6 = \left(\frac{3}{5}\right)^{4+6}$

47. TEOREMA. Las potencias de los quebrados irreducibles--

son tambien irreducibles.- Sea la fracción $\frac{a}{b}$ irreducible y $\frac{a^n}{b^n}$ su potencia del grado n.

Por ser la fracción $\frac{a}{b}$ irreducible, los números a y b serán primos y por serlo éstos lo serán sus potencias a^n y b^n y por consiguiente la fracción $\frac{a^n}{b^n}$ será irreducible.

V. DIVISION DE FRACCIONES

48. La definición de división es siempre la misma, aunque el dividendo y el divisor sean fracciones; es, pues, una operación inversa de la multiplicación y por tanto tiene por objeto, dados un producto de dos factores y uno de ellos, hallar el otro factor.

49. División de dos fracciones.
Si se quiere hallar el cociente de dividir $\frac{3}{4}$ por $\frac{5}{7}$ la operación se indicará : $\frac{3}{4} : \frac{5}{7}$.

El número que se busca es tal, que sus cinco séptimas partes sea igual a $\frac{3}{4}$ luego sólo una séptima parte del cociente será cinco veces menor, o sea $\frac{3}{4 \times 5}$: y por tanto el cociente será igual a siete veces este número.

$$\frac{3}{4 \times 5} \quad 7 = \frac{3 \times 7}{4 \times 5} = \frac{3 \times 7}{4 \times 5}$$

Luego: Se obtiene el cociente de dos fracciones multiplicando la fracción dividendo por la inversa del divisor.
Tambien puede demostrarse esta regla, observando que el número que se obtiene aplicándola, es el que multiplicado por

el divisor da un producto igual al dividendo.

50. Dividir una fracción por un número entero.- Sea por ejemplo: $\frac{3}{7}$:5. Se trata de hallar la quinta parte de la fracción $\frac{3}{7}$ y esto se consigue, como sabemos, multiplicando por 5 el denominador: por tanto, $\frac{3}{7}:5 = \frac{3}{7 \times 5}$; si el divisor fuese factor del numerador del dividendo se podrá (y debe hacerse) dividir el numerador por el entero, dejando el mismo denominador. Así:

$$\frac{14}{9}:7 = \frac{14:7}{9} = \frac{2}{9}.$$

51. REGLA.- Para dividir un quebrado por un entero, se multiplica el denominador por el entero, dejando el mismo numerador, o se divide si es posible el numerador por el entero dejando el mismo denominador.

52. Dividir un entero por un quebrado. Este caso se reduce al de dividir dos fracciones, considerando al entero como un quebrado cuyo denominador sea la unidad.

Así: $4 : \frac{5}{7} = \frac{4}{1} : \frac{5}{7} = \frac{4 \times 7}{5}$

53. División de números mixtos.- Para dividir dos números mixtos, se reducen a quebrados y se dividen como éstos.

Así $3\frac{4}{5} : 2\frac{1}{3} = \frac{19}{5} : \frac{7}{3} = \frac{19 \times 3}{5 \times 7} = \frac{57}{35}.$

54. La operación de dividir números implícitos, en la cual intervienen fracciones, se efectúa del mismo modo que se hizo cuando esos números eran enteros.

Por ejemplo: Dividir dos potencias semejantes de base fraccionaria. Se dividirán las bases y el cociente se elevará a la potencia común.

$$\left(\frac{3}{7}\right)^5 : \left(\frac{4}{5}\right)^5 = \left(\frac{3}{7} : \frac{4}{5}\right)^5 = \left(\frac{15}{28}\right)^5$$

EJERCICIOS

I. Un estudiante emplea diariamente $4\frac{3}{4}$ horas en clases, $3\frac{4}{5}$ horas en estudio, $\frac{1}{3}$ hora en el aseo $\frac{3}{4}$ hora en las comidas y $3\frac{1}{4}$ horas en el recreo. Cual es la cantidad total de tiempo invertido en estas ocupaciones.?

II. Una fuente da 25 litros en 5 minutos, otra 30 en 7 minutos y otra 35 en 8 minutos. Que cantidad de agua darán en un minuto.?

III. Un estanque recibe agua de dos fuentes que lo llenarían, la primera en 3 horas y la segunda en 4; desagua por dos orificios capaces de vaciarle el primero en 5 horas y el segundo en 6. Que parte del estanque se habrá llenado en una hora, suponiendo que corran a un tiempo las dos fuentes y estén abiertos los dos orificios y que el estanque estuviera primitivamente vacío ?.

IV. Multiplicar :

$$\frac{4}{5} \times 7; \quad 9 \times \frac{3}{8}; \quad \frac{2}{3} \times \frac{5}{7} \text{ y } \frac{3}{8} \times \frac{2}{7} \times \frac{5}{6}$$

expresando lo que significa el producto.

V. Una persona a quien se pregunta que hora es, responde que son los $\frac{2}{3}$ de los $\frac{3}{4}$ de los $\frac{4}{5}$ de las 12 horas. Que hora es ?.

VI. En $\frac{5}{4}$ de hora un tren recorre 43 kms. Cuanto recorrerá en una hora?.

VII. Una fuente dá 21 hl. en $\frac{4}{5}$ de hora; otra, 21 en $\frac{7}{2}$ de hora. Corriendo las dos juntas, en cuanto tiempo llenarán un deposito de 500 hl.

VIII. Por cual fracción se divide $\frac{5}{7}$ cuando se suman 5 unidades a cada uno de sus términos.

IX. Dividir :

$$\frac{5}{7} : 9; \quad \frac{3}{5} : 8; \quad \frac{5}{4} : \frac{2}{7} \text{ y } 6 : \frac{6}{7}$$

CAPITULO III

FRACCIONES DECIMALES

55. La unidad puede dividirse en diez partes iguales, que se llaman décimas: cada décima puede dividirse en diez partes iguales, que se llaman centésimas, y así sucesivamente, denominándose milésimas, diezmilésimas, cienmilésimas, millonésimas, diezmillonésimas, etc., a las unidades fraccionarias que resultan. Estas unidades fraccionarias reciben el nombre de decimales.

Como se ve, nosotros las hemos considerado ya y su escritura corresponde a $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$, etc.

56. Número decimal es el compuesto de unidades y partes decimales de la unidad o tan sólo por unidades fraccionarias decimales.

Así: $2 + \frac{13}{100} + \frac{8}{1000}$

es un número decimal; se compone este número decimal de 2 (que le podemos suponer 1 como denominador) de $\frac{13}{100}$ y $\frac{8}{1000}$ cuyos denominadores son, respectivamente, 100 y 1000; reuniendo estas partes y aplicando el método de m. c. m. se obtendrá una fracción de denominador 1000, pues éste es el m.c.m. de los denominadores, y se tendrá:

$$2 + \frac{13}{100} + \frac{8}{1000} = \frac{2000}{1000} + \frac{130}{1000} + \frac{8}{1000} = \frac{2138}{1000}$$

57. Todo número decimal, como vemos, se puede reducir a una fracción, cuyo denominador es una potencia de 10, que recibe el nombre de fracción decimal o sistemática; se usan por esto de igual manera las expresiones número decimal y fracción decimal.

Cada unidad contiene diez décimas, cada décima contiene —

diez centésimas, etc., y por lo tanto, la nomenclatura y escritura de los números decimales se podrá subordinar a los mismos principios que la de los números enteros. No existe mas que una diferencia: En los números enteros, el último orden enunciado o escrito era siempre el de las unidades; en los números decimales, el último orden enunciado puede ser cualquiera.

1 decena = 10 unidades
1 unidad = 10 décimas
1 décima = 10 centésimas

En el cuadro adjunto se ve la relación que existe entre una unidad de un orden y la inmediata inferior.

Todo número decimal se compone, pues, de unidades de diferentes órdenes en número inferior a diez.

De la misma manera que los diferentes órdenes de unidades enteras se clasifican por clases (unidades, millares, millones), etc., y en cada clase se comprenden tres órdenes; del mismo modo en los números decimales, se distinguen las mismas clases de unidades decimales, que se llaman de las milésimas, de las millonésimas, de las milmillonésimas, etc., en cada clase se comprenden tres órdenes; en el de las milésimas; unidades, decenas y centenas de milésimas; que son, respectivamente, milésimas, centésimas y décimas; en el de las millonésimas; unidades, decenas y centenas de millonésimas; que son, respectivamente, millonésimas, cienmilésimas y diez milésimas, y así sucesivamente.

58. Un número decimal se enuncia expresando los números de los diferentes órdenes de unidades que contiene; pero es más conveniente expresar las clases o grupos de unidades principales; la última clase puede no contener más que uno o dos órdenes de unidades, y por lo tanto se enunciará como un número de una o dos cifras, con la denominación de la de sus unidades.

Así diremos: 38 unidades, 456 milésimas, 584 millonésimas

59. Un número decimal se escribe de izquierda a derecha, colocando los números que expresan sus clases unos a conti-

nuación de otros, teniendo cuidado de que los diferentes órdenes de unidades que contienen se coloquen en órden decreciente para poner de manifiesto el último orden decimal enunciado, se escribe una coma a la derecha de la cifra de las unidades simples; esta coma separa las unidades enteras de las fraccionarias. Si el número decimal carece de parte entera se escribirá en su lugar un cero y si careciese de algún orden decimal, se ocupa su lugar correspondiente tambien con un cero

Así: escribir el número decimal, 38 unidades, 4 milésimas, 528 millonésimas, 42 cienmillonésimas.

Se tendrá: 38,004 528 42

60. LECTURA DE LOS NUMEROS DECIMALES.- Se lee el número de unidades enteras y después el de las decimales, o por clases, expresando en la última clase el nombre del último orden decimal que contenga o como si fuera entero, dándole la denominación que corresponde a su última cifra. Otra manera de leer un decimal es leyéndolo como si fuera un número entero y expresando el orden decimal que corresponde a su última cifra; de esta manera el número anterior se leerá: tres mil ochocientos millones cuatrocientos cincuenta y dos mil ochocientas cuarenta y dos cienmillonésimas.

61. Todo número decimal o fracción decimal (57), se puede escribir como las fracciones ordinarias; bastará para ello poner por numerador el número escrito, prescindiendo de la coma y por denominador la unidad seguida de tantos ceros como cifras decimales tenga el número.

Así, el número decimal 3,405 se escribirá en forma de quebrado $\frac{3405}{1000}$.

Las fracciones decimales tienen las mismas propiedades que las ordinarias, pero cuando aquéllas se escriben en forma entera, es decir, empleando una coma, esas propiedades se traducen en reglas prácticas que simplifican las operaciones numéricas.

62. Una fracción decimal no se altera, escribiendo o su-

primiendo ceros en su derecha.

Si al número decimal 2,14 se le agregan dos ceros, por ejemplo, a su derecha, se forma el número 2,1400, que contiene los mismos números de unidades, tanto enteras como decimales; tambien se puede poner de manifiesto esta propiedad, así:

$$2,14 = \frac{214}{100} \; ; \; 2,1400 = \frac{21400}{10000} = \frac{214}{100}.$$

63. Si en una fracción decimal se corre la coma 1,2,3... lugares a derecha o izquierda, el decimal queda multiplicado o dividido por la unidad seguida de tantos ceros como lugares se corrió la coma.

Sea el número 3,1823; si se corre la coma dos lugares a la derecha, resultará el número 318,23, que vamos a probar que es cien veces mayor que el dado.

En efecto: la cifra 3, que en el primer número representa unidades, en el transformado por movimiento de la coma representa centenas; la cifra 1, que representa décimas, representa ahora decenas, y así sucesivamente, y como las centenas, decenas, etc., son cien veces mayores que las unidades, décimas, etc., el número habrá quedado multiplicado — por 100.

Tambien puede ponerse de manifiesto esta propiedad del modo siguiente:

$$3,1823 = \frac{31823}{10000}$$

$$318,23 = \frac{31823}{100}$$

Vemos que se pasa de la primera fracción a la segunda, dividiendo su denominador por 100 y por lo tanto ha quedado multiplicada por 100.

REGLA.- Para multiplicar o dividir un decimal por la unidad seguida de ceros, basta correr la coma a la derecha o a la izquierda tantos lugares como ceros acompañan a la unidad. Si no hubiesen cifras bastantes se suplen con ceros.

Así : $3,1415 \times 100 = 314,15$
$3,1415 : 100 = 0,031415$

64. ADICION Y SUSTRACCION.- Los números decimales se suman y restan como los enteros; es tan sólo preciso tener cuidado que al escribir unos debajo de otros se correspondan las comas con lo cual se corresponderán todos los órdenes de unidades.

Así, para efectuar la suma $3,14 + 22,143 + 0,032$, se dispondrá del modo siguiente:

$$\begin{array}{r} 3,14 \\ 22,143 \\ 0,032 \\ \hline 25,315 \end{array}$$

La coma del resultado debe corresponderse con la de los sumandos.

Restar de 145,24 el número 96,145.

$$\begin{array}{r} 145,24 \\ 96,145 \\ \hline 49,095 \end{array}$$

Se supone que el minuendo y sustraendo tienen el mismo número de cifras; para ello se suplen con ceros los órdenes, que falten; en el ejemplo propuesto hemos supuesto que la cifra de las milésimas en el minuendo es cero. La coma del resto debe corresponderse con las del minuendo y sustraendo.

65. MULTIPLICACION DE NUMEROS DECIMALES.- Sea el número 2,142 que se ha de multiplicar por 0,16.

Se podrá escribir:

$$2,142 = \frac{2142}{1000} \quad \text{y} \quad 0,16 = \frac{16}{100}$$

y por lo tanto,

$$2,142 \times 0,16 = \frac{2142}{1000} \times \frac{16}{100} = \frac{2142 \times 16}{1000 \times 100} = \frac{34272}{100000} = \qquad 034272$$

de donde se deduce la siguiente práctica:

Para multiplicar dos números decimales se prescinde de las comas y se multiplican los números enteros que resultan separando de la derecha del resultado con una coma tantas cifras decimales como tengan entre ambos factores.

Si uno de los factores es entero, se aplica la misma regla.

DIVISION DE NUMEROS DECIMALES

66. Consideraremos dos casos:

1o. Dividir un decimal por un entero.

REGLA.- Para dividir un decimal por un entero, se prescinde de la coma en el dividendo y se opera como si fuesen enteros. Hallado el cociente entero, se separan de su derecha, con una coma, las cifras necesarias para que exprese unidades decimales del mismo orden que las del dividendo.

Si queremos hallar el cociente de dividir 2,361 por 7; sabemos que éste será la séptima parte de 2,361, o sea de 2361 milésimas; obtendremos, pues, el cociente dividiendo 2361 por 7 y haciendo que el resultado exprese milésimas. La operacion se dispone del modo siguiente:

```
2,361 |_7_____
  26   0,337
   51
    2
```

Este cociente es aproximado por defecto: el cociente exacto se obtendrá agregando al hallado la fracción $\frac{2}{7}$ de milésima.

El número 0,338 será aproximado por exceso; ambos se diferencian del exacto en menos de 1 milésima. La aproximación — del cociente puede llevarse hasta el orden decimal que se necesite; cuando no sea exacto, bastará para ello escribir los ceros que sean precisos a la derecha del dividendo.

Así, hallar con menor error de 1 milésima el cociente de dividir 2,3 por 3.

La operación se dispondrá del modo siguiente:

```
2,300 |8
  70   0,287
   60
    4
```

Hemos agregado dos ceros al dividendo para completar el número de cifras necesario para obtener el cociente con menor error que el límite considerado y hemos obtenido 0,287 para cociente, con menor error de 0,001.

67. 2o. División de dos números decimales o de un entero por un decimal. El cociente de dos números no se altera multiplicando el dividendo y el divisor por un mismo número; siempre se podrá, pues, reducir este caso a uno en que el divisor sea entero, para lo cual bastará multiplicar el dividendo y el divisor por la unidad seguida de tantos ceros como cifras decimales tenga el divisor.

Así: 3,13 : 0,148 = 3180 : 148.

y tambien, 3,241 : 1,16 = 324,1 : 116.

En los ejemplos anteriores, hemos multiplicado el dividendo y divisor de la primera división por 1000 y en la segunda por 100, habiendo quedado reducida la división de decimales a la de dos números enteros en el primer caso y a la de un decimal por un entero en el segundo.

REGLA. Para dividir un número entero por un decimal o dos decimales, se multiplican ambos por la unidad seguida de tantos ceros como cifras decimales tenga el divisor y quedará reducida la operación a dividir dos números enteros o un decimal por un entero.

REDUCCION DE FRACCIONES ORDINARIAS

A DECIMALES Y VICEVERSA

63. Una fracción ordinaria irreducible, puede ser igual a otras muchas de diferentes términos y claro es que entre éstas puede haber alguna fracción decimal.

Sea la fracción ordinaria irreducible $\frac{a}{b}$; si puede ser igual a una fracción decimal, ésta será de la forma $\frac{x}{10^n}$ en la que x representa la fracción decimal, prescindiendo de la coma, y n el número de cifras decimales de la misma: se podrá escribir:

$$\frac{a}{b} = \frac{x}{10^n}$$

de donde,

$$x = \frac{a \times 10^n}{b}$$

Como x debe ser un número entero, es preciso que $a \times 10^n$ sea divisible por b, y como b y a son primos entre sí, es preciso que b sea divisor de 10^n, lo cual exige que b no contenga otros factores primos que el 2 y el 5, toda vez que $10^n = 2^n \times 5^n$; tambien se ve que el mayor de los exponentes de los factores primos de b es igual a n.

La reducción de una fracción ordinaria a decimal, queda pues, reducida a la determinación del número x y éste es el cociente de dividir $a \times 10^n$ por b.

REGLA.- Para reducir una fracción ordinaria o decimal, se multiplica el numerador por la unidad seguida de tantos ceros como indique el mayor de los exponentes de los factores primos 2 y 5 del denominador y del cociente obtenido, se separan n cifras decimales.

Ejemplo: Reducir a fracción decimal la ordinaria $\frac{3}{40}$ puesto que $40 = 2^3 \times 5$, multiplicaremos el numerador 3 por 1000, dividiremos el número que resulte por 40 y separaremos del cociente tres cifras decimales.

Así:

$$\begin{array}{r|l} 3000 & 40 \\ \cline{2-2} 200 & 75 \\ 00 & \end{array}$$

Luego, $x = 75$ y por lo tanto $\frac{3}{40} = 0{,}075$

69. Cuando el denominador de una fracción irreducible no contiene los factores primos 2 y 5 o contiene alguno de éstos, y otros, la fracción no se reduce exáctamente a decimal.

70. El valor de una fracción cualquiera puede obtenerse con una aproximación determinada.- Supongamos que se desea obtener el valor de la fracción $\frac{a}{b}$ con un error menor que $\frac{1}{100}$, llamando x al mayor número de centésimas contenidas en $\frac{a}{b}$ se podrá escribir:

$$\frac{x}{100} < \frac{a}{b} < \frac{x+1}{100}$$

y por tanto, $x < \frac{a \times 100}{b} < x + 1.$

lo cual quiere decir que x es el cociente entero de dividir -- $a \times 100$ por b.

Luego, para hallar el valor de una fracción con menor error de $\frac{1}{n}$ basta multiplicar su numerador por n, dividir el producto por el denominador y hacer que el cociente exprese unidades fraccionarias de denominador n.

Ejemplo: Evaluar $\frac{3}{7}$ con menos error de $\frac{1}{1000}$

Se dispondrá la operación del modo siguiente:

$$\begin{array}{r|l} 3000 & 7 \\ \cline{2-2} 20 & 428 \\ 60 & \\ 4 & \end{array}$$

Luego, 0,428 es el valor de $\frac{3}{7}$ por defecto con menor error de 0,001.

La regla anterior sirve para aproximar el cociente de dos números enteros y obtener su valor con menor error de 0,1, 0,01 etc.

Hallar el cociente de los números 385 y 56; puesto que estos números son divisibles por 7; se podrá hallar el cociente de los números 55 y 8, que son los cocientes de dividir aquéllos por 7, y se tendrá:

$$\begin{array}{r|l} 55 & 8 \\ \cline{2-2} 70 & 6{,}875 \\ 60 & \\ 40 & \\ 0 & \end{array}$$

71. Cuando de una fracción ordinaria cuyo denominador es primo con 10, o contiene los factores primos 2 y 5 y además otros, se quiere hallar su valor aproximado en decimales da lugar a una fracción decimal de ilimitado número de cifras. Esta fracción decimal tiene la particularidad de ser periódica, es decir, que sus cifras se repiten contínua e indefinidamente a partir de una de ellas; el grupo de cifras que se repite se llama período; éste puede comenzar en la cifra de las décimas y la fracción decimal se llama periódica pura, o tener una parte que no se repite, y entonces se llama periódica mixta; el grupo de cifras que no se repite se llama parte no periódica.

72. TEOREMA.- Cuando una fracción ordinaria no se reduce exactamente a decimal, da lugar a una fracción periódica.

Ejemplo: $\frac{3}{7}$ si se hallan valores aproximados de ésta fracción en menos de 0,1, 0,01, etc., se tendrá:

$$\begin{array}{l|l} 30 & 7 \\ \hline \;\;20 & 0,(428571)4\ldots \\ \;\;\;\;60 & \\ \;\;\;\;\;\;40 & \\ \;\;\;\;\;\;\;\;50 & \\ \;\;\;\;\;\;\;\;\;\;10 & \\ \;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;30 & \\ \;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\ldots & \end{array}$$

En las divisiones efectuadas, el primer resto es el que corresponde al primer dividendo, o sea 3: todos los restos son menores que el divisor 7; luego, cuando hayan aparecido a lo más los restos 1, 2, 3; 4, 5, y 6, se repetirá alguno, y por lo tanto, se repetirá un dividendo parcial, y por consiguiente la cifra del cociente, y desde ese momento, se repetirán todas en el mismo orden.

73. Las fracciones periódicas suelen escribirse, encerrando en un paréntesis el período, así:

2,(134) periódica pura, y 5,14(56) periódica mixta.

Reducir a decimales las fracciones $\frac{2}{27}$ y $\frac{324}{175}$; la primera tiene su denominador primo con diez y da lugar a una fracción periódica pura:

$$\frac{2}{27} = 0,(074)$$

La segunda tiene en su denominador el factor primo 5 y además otros y se reduce a una periódica mixta.

Así: $\frac{324}{175} = 1,85(142857)$.

85 es la parte no periódica y 142857 es al período.

REDUCCION DE FRACCIONES DECIMALES A ORDINARIAS

74. Las fracciones ordinarias irreducibles hemos visto que originan tres clases de fracciones decimales: exactas, periódicas puras y periódicas mixtas.

75. Tres casos, pues, debemos distinguir en la reduccion de fracciones decimales a ordinarias.

1o. que la decimal sea exacta.
2o. que sea periódica pura.
3o. Que sea periódica mixta.

76. 1er. caso.- Sea la fracción decimal exacta, 2,143. Por las reglas dadas, para la lectura de los números decimales, sabemos que ese número es igual a $\frac{2143}{1000}$.

REGLA.- Para transformar una fracción decimal exacta en ordinaria, se pone por numerador el decimal sin la coma, y por denominador la unidad seguida de tantos ceros como cifras decimales tiene.

El denominador de la fracción ordinaria generatríz de una decimal exacta, no contiene más factores primos que el 2 y el 5; lo mismo ocurrirá con la fracción irreducible a que se llegue por simplificación.

77. RECIPROCO DEL TEOREMA (68).- El denominador de la fracción ordinaria irreducible generatriz de una decimal exacta, no contiene más factores primos que 2 y 5.

78. 2o. CASO.- Que la fracción decimal sea periódica pura.
Sea la fracción periódica pura 0,(18).
Llamemos f a la fracción ordinaria equivalente y tendremos:

$$f = 0,(18). \quad (1)$$

Si los dos miembros de esta igualdad se multiplican por 100, tendremos:

$$100\ f = 18(18) \quad (2)$$

toda vez que si se corre la coma dos lugares a la derecha, el número de períodos iguales a 18, seguirá siendo ilimitado.

Si de la igualdad (2) restamos miembro a miembro, los de la (1) se tendrá:

$$99\,f = 18. \quad \text{de donde,}$$

$$f = \frac{18}{99}.$$

79. REGLA.- Para reducir una fracción periódica pura a ordinaria, se pone por numerador el período y por denominador un número formado por tantos nueves como cifras tiene el período .

80. OBSERVACION.- El denominador compuesto de nueves, no contiene ni el factor 2 ni el 5; lo mismo ocurrirá después de simplificada la fracción.

81. TEOREMA.- El denominador de la fracción irreducible equivalente a una decimal periódica pura, es primo con 10.

3er. CASO.- Que la fracción decimal dada sea periódica -- mixta.

Sea la fracción 0,14(256),
llamemos f a la fracción ordinaria generatriz y se podrá escribir:

$$f = 0{,}14(256)$$

Si multiplicamos los dos miembros de ésta, primero por 100 y después por 100000, se tendrá las dos igualdades siguientes:

$$100\,f = 14{,}(256),$$
$$100000\,f = 14256{,}(256),$$

y restando miembro a miembro, resultará:

$$99900\,f = 14256 - 14,$$

y por lo tanto:

$$f = \frac{14256 - 14}{99900} \qquad (3)$$

82. REGLA.- Para convertir una fracción decimal periódica mixta en ordinaria, se pone por numerador el número formado con la parte no periódica seguida del período, menos la parte no periódica y por denominador tantos nueves como cifras tiene el período, seguido de tantos ceros como cifras tiene la parte no periódica.

OBSERVACION.- La última cifra del período no puede ser igual a la última de la parte no periódica, pues entonces el período comenzaría en la cifra anterior; el numerador (3) no puede, pues, terminar en cero; lo cual quiere decir que al simplificarla, no pueden desaparecer a la vez los factores 2 y 5 del denominador; tampoco pueden desaparecer todos los distintos del 2 y 5, porque si esto fuese posible, la fracción originaria una decimal exacta.

.83. TEOREMA.- La fracción ordinaria irreducible generatriz de una decimal periódica mixta, tiene en su denominador factores primos 2 y 5 y además otros distintos.

84. TEOREMA RECIPROCO DEL (81).- Toda fracción irreducible cuyo denominador sea primo con 10, se transforma en fracción decimal periódica pura.

85. TEOREMA RECIPROCO DEL (83). Toda fracción irreducible cuyo denominador, además de los factores primos 2 y 5, contiene otros factores, origina una fracción decimal periódica mixta.

En efecto: Sólo tres clases de fracciones hemos visto que se pueden originar, y en esta hipótesis, no puede ser exacta ni periódica pura, porque en ambos casos el denominador de la ordinaria correspondiente no cumpliría con las condiciones — del enunciado.

EJERCICIOS.

I. Según el Censo de 1940 los principales cultivos (excluidos pastos) se distribuían respecto al total de los mismos en la República Dominicana, como siguen : Plátanos 18,1 %; Caña 14,3 % ; Cacao 11,1 % ; Café 9,9 % ; Arroz 7,7 %; Habichuelas 3,0 % ; Guineos 2,2 % y Tabaco 1,5 %. Que fracción decimal en centésima le quedaba al resto de los otros — cultivos.

II. En 1939 las dos Provincias que mas Cacao cosecharon fueron las de Duarte y La Vega con 11 442, 9 y 6 406,7 toneladas respectivamente y las que menos, las de Libertador y Distrito de Santo Domingo que figuraron con 3,9 y 4,3 toneladas. En cuanto superaron las dos primeras a las dos últimas?

III. Multiplicar :

$$3{,}27 \times 8 \;; \quad 172 \times 1{,}5 \quad y \quad 9{,}62 \times 0{,}07$$

y expresar el significado del producto.

IV. Multiplicar los anteriores multiplicandos por sus multiplicadores expresados en centésima.

Para el primero, tendríamos :

$$3{,}27 \times \frac{800}{100}.$$

V. Interpretar los productos como tantos por ciento.

VI. Siendo la superficie cultivada de la Provincia Duarte de 67,517 hectáreas, y representando el 44,54% lo dedicado a cacaotales. Cuántas hectáreas se cultivan de cacao.

VII. Dividir 0,3: 6 ; 6 : 0,3 y 0,05 : 0,3

Interpretación de los resultados.

VIII. a) Hallar la cantidad de pesos que al 600% sea 0,3 de peso.

b) Hallar la cantidad de pesos cuyo 30% es 6.

c) Hallar la cantidad de pesos cuyo 3% es 0,06.

IX. Si la Provincia Duarte dedicó 30,070 hectáreas a Cacao que representa el 44,54% de su extensión laborable. Cuál es esta extensión laborable.

X. Si de 67,517 hectáreas se dedican 30,070 al cultivo de un fruto. Que tanto por ciento de ellas representa este cultivo.

LIBRO - IV

LOS NUMEROS INCONMENSURABLES

Y LAS RAICES EN GENERAL

C A P I T U L O   P R I M E R O

BREVES IDEAS SOBRE EL NUMERO INCONMENSURABLE

86. Cuando una cantidad constante no es múltiplo de la unidad, ni de ninguna de sus partes alícuotas, es imposible expresarla ni por un número entero ni por un fraccionario; se pueden entonces medir una serie de cantidades conmensurables, que se aproximan a ella indefinidamente.

87. Cantidad variable es la que puede tomar una serie de valores determinados con arreglo a una ley.

88. Límite de una cantidad variable, es una constante a la cual se aproxima indefinidamente la variable, en condiciones tales, que la diferencia entre la constante y los valores por que va pasando sucesivamente la variable, puedan llegar a ser y continúen siendo menores que cualquier cantidad dada por pequeña que sea.

89. Las cantidades variables pueden o no tener límite.
Las cantidades variables pueden tomar valores mayores que cualquier cantidad dada por grande que sea; estas cantidades, se llaman infinitamente grandes; pueden tomar valores menores que cualquier cantidad dada por pequeña que sea, y entonces se llaman infinitamente pequeñas; las cantidades que no varían de una de esas maneras, se llaman finitas.

El número n, considerado como de la serie natural, es variable infinitamente grande, puesto que puede ser mayor que cualquier número dado.

El número $\frac{1}{n}$ teniendo n el significado anterior, es una variable infinitamente pequeña.

La longitud que puede una persona recorrer, es variable pero finita.

90. Una variable se llama continua o se dice que varía de un modo continuo, cuando al pasar de un valor dado a otro tambien dado, pasa por todos los intermedios o comprendidos entre ambos.

91. Todo número inconmensurable puede expresarse por un número entero, con menor error de una unidad y por un fraccionario con menor error que una unidad fraccionaria dada.

Sea el número inconmensurable A; si se forma la serie natural

$$1.2.3\ldots K,\ K+1\ldots$$

el número A $>$ 1, se hallará comprendido entre dos números de la misma; por ejemplo, entre K y K + 1 y diremos:

$$K < A < K+1$$

del mismo modo, si formamos la serie

$$0,\ \frac{1}{n},\ \frac{2}{n},\ \frac{3}{n}\ldots\ldots\frac{K}{n},\ \frac{K+1}{n}\ldots\ldots$$

el número A $<$ 1, estará comprendido entre dos de la serie y se podrá escribir

$$\frac{K}{n} < A < \frac{K+1}{n}\ldots$$

Como la diferencia entre $\frac{K+1}{n}$ y $\frac{K}{n}$ es $\frac{1}{n}$, la diferencia $\frac{k+1}{n} - A$ ó $A - \frac{K}{n}$ son menores que $\frac{1}{n}$ y cuando por valor del número A se toma $\frac{K+1}{n}$ se dice que se comete por exceso un error menor que $\frac{1}{n}$; cuando se toma por valor de

A el número $\frac{K}{n}$ se dice que se comete un error por defecto inferior a $\frac{1}{n}$.

Las operaciones con números inconmensurables se efectúan sustituyéndolos por números conmensurables que se les aproximen indefinidamente.

II. RADICACION

100. Radicación es una operación inversa de la elevación a potencias y tiene por objeto, dados la potencia y el exponente hallar la base. Así: $a^n = A$ (1), la operación que determina a; conociendo A y n, se llama radicación y se expresa del modo siguiente:

$$\sqrt[n]{A} = a. \qquad (2)$$

vemos, pues, que las igualdades (1) y (2) son equivalentes.

101. Los números A, a y n, que en la primera igualdad se llaman potencia, base y exponente, en la segunda igualdad se llaman radicando, raíz ó índice.

102. Las raíces de los números se clasifican por el índice y se llaman cuadradas, o de segundo grado cuando el índice es 2; cúbicas, o de tercer grado, cuando el índice es 3, y en general de cuarto, quinto, etc., enésimo grado cuando el índice es 4, 5...n.

103. Si la raíz enésima de un número entero es otro número entero, el número se llama potencia exacta del grado n y se dice que tiene raíz enésima exacta.

Así, puesto que $36 = 6^2$, la raíz cuadrada de 36 será 6 y el número 36 se dice que es cuadrado perfecto, o lo que es igual, que tiene raíz cuadrada exacta; la operación se indica así:

$$\sqrt{36} = 6 .$$

104. TEOREMA.- Si la raíz enésima de un número entero no es otro número entero, tampoco será igual a un número frac-

cionario y por lo tanto será inconmensurable.

Sea el número 114, que no es cubo perfecto, toda vez que se halla comprendido entre los cubos de dos números enteros consecutivos, puesto que se tiene:

$$4^3 < 114 < 5^3.$$

La raíz cúbica de 114 no es, pues, 4 ni 5; más se alejarán de su verdadero valor, los números menores que 4 y los mayores que 5.

Un número fraccionario irreducible comprendido entre 4 y 5, no puede ser la raíz, porque si lo representamos por $\frac{a}{b}$ el cubo de este número será $\frac{a^3}{b^3}$, tambien irreducible y por lo tanto imposible que sea igual a un número entero; si, pues, la raíz cúbica de 114 no es igual a un número entero, ni a un fraccionario, tendrá que ser inconmensurable.

105. Si los dos términos de un quebrado irreducible son potencias exactas del grado n, el quebrado tambien lo es y se obtiene la raíz enésima de aquél quebrado, extrayendo la raíz enésima de sus dos términos.- Así, el quebrado irreducible $\frac{4}{25}$ tiene raíz cuadrada exacta, porque sus dos términos son cuadrados perfectos y se tiene:

$$\sqrt{\frac{4}{25}} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{25}} = \frac{2}{5}$$

106. TEOREMA. La raíz enésima de un quebrado irreducible, no puede ser igual a un número entero, y por tanto, si no es igual a otro quebrado irreducible, será inconmensurable.

La condición para que un quebrado irreducible tenga raíz enésima exacta, es que la tengan sus dos términos, o lo que es igual, que sus dos términos sean potencias enésimas exactas.

Sea el quebrado irreducible $\frac{A}{B}$ si tiene raíz enésima exacta será otro quebrado irreducible que llamamos $\frac{a}{b}$ y se podrá escribir

$$\sqrt[n]{\frac{A}{B}} = \frac{a}{b} \qquad \text{o tambien} \qquad \frac{A}{B} = \frac{a^n}{b^n}$$

Ahora bien, siendo irreducibles estas dos fracciones, tienen que ser idénticas, y por lo tanto:

$$A = a^n \quad y \quad B = b^n$$

Como se desea probar.

107. TEOREMA.- La raíz enésima de un número inconmensurable es tambien inconmensurable.

108. La radicación es una operación uniforme, es decir, que si de los dos miembros de una igualdad se extrae una misma raíz, se obtiene otra igualdad, y si de los dos miembros de una desigualdad se extrae una misma raíz, los resultados forman una desigualdad del mismo sentido que la propuesta.

Así, de la igualdad $A = B$ resulta esta otra $\sqrt[n]{A} = \sqrt[n]{B}$.

de la desigualdad $A > B$ resulta esta otra $\sqrt[n]{A} > \sqrt[n]{B}$.

Esta propiedad es consecuencia de la ley de uniformidad de la potenciación.

RADICACION DE NUMEROS IMPLICITOS, DADOS BAJO LA FORMA DE POTENCIAS, PRODUCTOS Y COCIENTES.

109. TEOREMA.- La raíz de una potencia de un número, cuyo exponente es múltiplo del índice, se obtiene elevando ese número a una potencia, cuyo exponente sea el cociente del exponente por el índice.

Así: $\sqrt[4]{a^8} = a^{8:4} = a^2$

porque en efecto, $(a^2)^4 = a^{2\times 4} = a^8$

110. TEOREMA.- La raíz enésima de un producto, cuyos factores sean potencias exactas del grado n, se obtiene extrayendo de todos los factores la raíz enésima y multiplicando los resultados.

Así: $\sqrt[n]{A.\,B.\,C.} = \sqrt[n]{A}.\ \sqrt[n]{B}.\ \sqrt[n]{C}.$

En efecto: el primer miembro elevado a la potencia n, nos da por resultado A. B. C. y el segundo tambien nos da A.B.C. lo cual prueba que forman una igualdad.

La raíz enésima de un cociente se obtiene dividiendo la raíz enésima del dividendo por la raíz enésima del divisor

Así: $\sqrt[n]{\frac{A}{B}} = \frac{\sqrt[n]{A}}{\sqrt[n]{B}}$

En efecto: Si $\frac{A}{B} = C$, se tendrá $A = B.\ C$ y por tanto

$\sqrt[n]{A} = \sqrt[n]{B}\ .\ \sqrt[n]{C}$ y dividiendo los dos miembros por $\sqrt[n]{B}$, se

obtiene $\frac{\sqrt[n]{A}}{\sqrt[n]{B}} = \sqrt[n]{C} = \sqrt[n]{\frac{A}{B}}$

Como se deseaba probar.

LA RAIZ CUADRADA

111. Se llama raíz cuadrada de un número, otro número que elevado al cuadrado, lo reproduce.- Así la raíz cuadrada de 49 es 7, toda vez que $7^2 = 49$.

112. Cuando un número no es cuadrado perfecto, se puede hallar su raíz con menor error de una unidad: a esta raíz se le llama raíz cuadrada entera; es, por lo tanto, la raíz cuadrada del mayor cuadrado entero contenido en el número dado. Así: estando el número 18 comprendido entre los cuadrados de 4 y 5

se podrá escribir:

$$4^2 < 18 < 5^2$$

luego, la raíz cuadrada entera de 18 es 4.

113. Se llama resto en la operación que determina la raíz cuadrada entera de un número, a la diferencia que existe entre el número y el cuadrado de su raíz cuadrada entera.

Así, siendo N un número cualquiera, si llamamos a, la raíz cuadrada entera y R el resto, se tendrá por definición:

$$R = N - a^2$$

de donde se deduce: $N = a^2 + R$.

114. TEOREMA.- La raíz cuadrada con menor error de una unidad de un número cualquiera (entero, fraccionario o inconmensurable), es igual a la raíz cuadrada entera de su parte entera.

Sea N el número y a su raíz cuadrada entera; llamemos A a la parte entera de N.

El número N estará comprendido entre los cuadrados de a y de $a + 1$, y se podrá escribir:

$$a^2 \geqq N < (a + 1)^2$$

es evidente que $A < (a + 1)^2$; por otra parte, siendo N igual o mayor que a^2, y por ser este número entero, se podrá asegurar que $A \geqq a^2$.

Se tiene, pues: $a^2 \geqq A < (a + 1)$

lo cual prueba que la raíz cuadrada entera de N, que hemos supuesto que era a, es tambien la raíz cuadrada entera de A, que es la parte entera de N.

Siempre que se desee obtener la raíz cuadrada de un número con menor error de una unidad, no habrá, pues, necesidad de considerar más que números enteros.

Así la raíz cuadrada entera de 8,56 es la misma que la de

8 y por lo tanto 2: la raíz cuadrada entera de $\frac{46}{7} = 6\frac{4}{7}$

es la de 6 y por tanto tambien 2.

RAIZ CUADRADA DE UN NUMERO ENTERO CON MENOR ERROR DE UNA UNIDAD.

115. Tres casos deben distinguirse: lo. que el número dado sea menor que 100, 2o. Que sea mayor que 100 y menor que 10,000, y 3o. Que sea un número entero cualquiera.

116. ler. CASO.- Si el número dado es menor que 100, es evidente que su raíz cuadrada entera será menor que 10 y se obtendrá sabiendo de memoria los cuadrados de los números de una sola cifra.

Números:	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Cuadrados:	1	4	9	16	25	36	49	64	81

Ejemplo: La raíz cuadrada entera de 75, será 8, toda vez que 75 es un número comprendido entre los cuadrados de los números 8 y 9; el resto será la diferencia entre 75 y 8^2, es decir, 11; se podrá escribir:

$$75 = 8^2 + 11.$$

117. 2do. CASO.- Cuando el número dado es mayor que 100, su raíz cuadrada entera es por lo menos igual a 10 y si al mismo tiempo dicho número es menor que 10,000, su raíz cuadrada entera será menor que 100, pues de la limitación: $100 < N < 10{,}000$ se deduce esta otra :

$$10 < \sqrt{N} < 100$$

La raíz que se busca es, pues, un número de dos cifras: una representará las decenas de la raíz y la otra será la cifra de las unidades.

118. TEOREMA.- La cifra de las decenas de la raíz cuadrada entera de un número menor que 10.000, se obtiene extrayendo la raíz cuadrada entera del número de sus centenas.

Sea el número 3846: como el número de sus centenas es 38 y la raíz cuadrada entera de 38 es 6; ésta será la cifra de las decenas de la raíz cuadrada entera de 3846, es decir, que la raíz de este número estará comprendida entre 60 y 70.

En efecto: el cuadrado de 6 puede restarse de 38, y por tanto el de 60 se podrá restar de 3800 y con mayor razón de 3846; el cuadrado de 7 no puede restarse de 38, y por lo tanto significa eso, que le excede por lo menos en una unidad,— luego el cuadrado de 70 no se podrá restar de 3800, puesto que le excederá por lo menos en una centena y por lo tanto tampoco se podrá restar aún de 3846, se puede, pues, escribir

$$60^2 < 3846 < 70^2$$

lo cual prueba que 6 es la cifra de las decenas de la raíz cuadrada del número dado.

119. TEOREMA.- Si del número dado se resta el cuadrado de las decenas de su raíz y el número de las decenas del resto se divide por el duplo de la cifra de las decenas, el cociente obtenido será igual o mayor que la cifra de las unidades.

En efecto: En el ejemplo considerado, siendo la cifra de las decenas de la raíz cuadrada entera 6, y componiéndose el cuadrado de la raíz, del cuadrado de las decenas (que es un número exacto de centenas), del doble producto de decenas por unidades (que es un número exacto de decenas) y del cuadrado de unidades, si del número 3846 se resta el cuadrado de 6 decenas, que es 36 centenas, el resto igual a 246, contendrá las otras dos partes del cuadrado de la raíz y además el resto de la operación.

Este número 246 es, pues, igual o mayor que el doble producto del número de decenas por el desconocido de las unidades; llamando x a este número, se podrá escribir:

$$246 \geqq 2 \,.\, 6 \,.\, 10 \,.\, x$$

$$\text{ó } 246 \geqq 12 \,.\, x \,.\, \text{decenas.}$$

$$\text{ó } 24 \text{ decenas} \geqq 12 \,.\, x \,.\, \text{decenas}$$

$$\text{y también } 24 \geqq 12 \,.\, x\text{; de donde}$$

$$x \leqq 24 : 12$$

como se deseaba probar.

La operación se dispone del modo siguiente:

$$
\begin{array}{r|l}
\sqrt{38'46} & 6\,2 \\ \cline{2-2}
3600 & \\ \cline{1-1}
246 & 12 \\
3844 & \\ \cline{1-1}
2 &
\end{array}
$$

y se dice: la raíz cuadrada de 38 es 6; el cuadrado de 6 decenas es 36 centenas, que restadas del número, dan una diferencia igual a 246; el número 24 de las decenas de este resto se divide por 12, (duplo de las decenas de la raíz) y el cociente 2, será la cifra de las unidades u otra menor; para comprobar esta cifra, se eleva al cuadrado el número 61, y como el resultado igual a 3844 se puede restar del número dado, la cifra 2 es buena, y la diferencia igual a 2, será el resto de la operación, pudiéndose escribir:

$$3846 = 62^2 + 2.$$

La cifra de las unidades se puede comprobar de un modo más rápido, observando que del número 3846 se ha restado ya la primera parte del cuadrado de la raíz, o sea 36 centenas, y por tanto, del resto hallado 246, se deben poder restar las otras dos partes del cuadrado de la raíz, o sea:

$$2 \,.\, 6 \,.\, 10 \,.\, 2 + 2^2 = (2 \,.\, 6 \,.\, 10 + 2) \times 2 = (12.10 + 2)2$$

$$= 122 \times 2 = 244$$

Luego: Para comprobar la cifra de las unidades , se escribe a la derecha del número 12 (divisor), se multiplica el número formado por ella, y si este producto se puede restar, de la diferencia anterior, la cifra será buena y obtendremos el resto de la operación: ésta se dispondrá del modo siguiente y se efectuará con la siguiente regla práctica:

$\sqrt{3846}$	62
36	
246	12 x 2
244	
2	

120. REGLA.- Para extraer la raíz cuadrada de un número , comprendido en el 2o. CASO, se divide en secciones de dos cifras, comenzando por la derecha, la primera de la izquierda podrá tener una o dos cifras; se extrae la raíz cuadrada entera de la primera sección de la izquierda y se tendrá la primera cifra de la raíz; se eleva esta cifra al cuadrado y el resultado se resta de dicha sección; a la derecha del resto se escribe la sección siguiente y del número formado se separa la primera cifra de su derecha; el número que queda a la izquierda se divide por el duplo de la cifra de las decenas y se obtendrá la cifra de las unidades de la raíz u otra mayor; para comprobar esta cifra, se escribe a la derecha del divisor y se multiplica el número formado por ella; si este producto se puede restar del que forman el dividendo con la cifra separada, la cifra será buena; se escribe a la derecha de la primera hallada y se tendrá la raíz que se desaba; la última diferencia hallada será el resto de la operación.

121. CASO GENERAL.- Sea el número 384562, del cual se desea obtener la raíz cuadrada.

Se demuestra, como lo hicimos en el 2o.caso, que el número de las decenas de la raíz cuadrada entera es igual a la raíz cuadrada del número de las centenas; este número es -- 3845, cuya raíz sabemos hallar; determinado el número de decenas de la raíz cuadrada entera, se halla la cifra de las unidades, haciendo aplicación del teorema (119) y vemos, por lo tanto, que la regla dada para el 2do. caso es aplicable al caso general.

Al hallar la cifra de las unidades de la raíz cuadrada entera de un número, puede suceder que el temor de escribir una cifra grande, nos induzca a escribir una cifra pequeña; esta circunstancia se pone de manifiesto, porque en ese caso el resto es superior al límite que le asigna el siguiente teorema.

122. TEOREMA.- El resto que se obtiene al extraer la raíz cuadrada entera de un número ès siempre menor que el duplo de la raíz mas una unidad.

Sea N un número, a su raíz cuadrada entera y R el resto.

Se podrá escribir: $N = a^2 + R$ y $a^2 < N < (a + 1)^2$. Luego, $a^2 + R < (a + 1)^2$ y desarrollando este cuadrado

$$a^2 + R < a^2 + 2a + 1$$

suprimiendo de ambos miembros a^2, se tiene, que finalmente, $R < 2a + 1$, como se deseaba probar.

123. El número de cifras de la raíz cuadrada entera de un número, es según la regla práctica dada para obtenerla, igual al de períodos, y éste es igual a la mitad del número de cifras cuando es par, y a la mitad por exceso cuando es impar.

Así, cuando un número tiene ocho cifras, su raíz cuadrada tendrá 4; cuando un número tiene 17 cifras, su raíz cuadrada tendrá 9.

124. CARACTERES DE EXCLUSION.- Se llaman caracteres de exclusión ciertas condiciones que cumplen algunos números y que prueban que no son cuadrados perfectos.

El cuadrado de un número termina en la misma cifra que el cuadrado de la cifra de sus unidades; por eso los cuadrados de los números terminados en 1 ó 9, terminan en 1; los de los terminados en 2 u 8, terminan en 4, etc.; como ningún cuadrado de números de una sola cifra termina en 2, 3, 7 y 8, se puede decir: todo número que termina en 2, 3, 7 u 8, no tiene raíz cuadrada exacta.

Si un número termina en 5, y la cifra de sus decenas no es 2, no será cuadrado perfecto.

Sea un número cualquiera terminado en 5: Si es cuadrado perfecto lo será de un número terminado en 5; su cuadrado se compondrá del cuadrado de decenas, que es un número exacto de centenas, del doble producto de decenas por unidades, que también en éste caso es un número exacto de centenas y del cuadrado de unidades, que es 25.

RAIZ CUADRADA DE UN NUMERO CUALQUIERA CON MENOR ERROR DE UNA UNIDAD FRACCIONARIA DADA

125. Se llama raíz cuadrada de un número con menor error de $\frac{1}{n}$ al mayor número de enésimos contenidos en su raíz cuadrada.

Si la raíz cuadrada de N, con menor error de $\frac{1}{n}$ es $\frac{x}{n}$ se podrá escribir la siguiente limitación:

$$\frac{x}{n} < \sqrt{N} < \frac{x+1}{n}$$

Los números $\frac{x}{n}$ y $\frac{x+1}{n}$, son las raíces cuadradradas del número N, el primero por defecto y el segundo por exceso.

126. Hallar la raíz cuadrada de un número N, con menor error de $\frac{1}{n}$.

Llamémosla $\frac{x}{n}$ y se podrá escribir:

$$\frac{x}{n} < \sqrt{N} < \frac{x+1}{n}$$

elevando esos tres números al cuadrado, tendremos:

$$\frac{x^2}{n^2} < N < \frac{(x+1)^2}{n^2}.$$

multiplicando esos tres números por n^2, se deduce:

$$x^2 < N \cdot n^2 < (x+1)^2.$$

lo cual prueba que el producto $N \cdot n^2$ es un número comprendido entre los cuadrados de x y x + 1 y por tanto que el número x es la raíz cuadrada entera del producto $N \cdot n^2$.

127. REGLA.- Para hallar la raíz cuadrada de un número N con menor error de $\frac{1}{n}$ basta extraer la raíz cuadrada entera del producto N . n^2 y expresar el resultado en enésimos.

Ejemplo: Hallar la raíz cuadrada de $\frac{3}{7}$ con menor error de $\frac{1}{8}$

Se halla la raíz cuadrada entera del producto $\frac{3}{7} \times 8^2$ ó sea de $\frac{192}{7}$: la parte entera de este número es 27, cuya raíz cuadrada es 5; luego 5 es la raíz cuadrada entera del producto $\frac{3}{7} \times 8^2$, y, por lo tanto, $\frac{5}{8}$ será la raíz con menor error de $\frac{1}{8}$, del número $\frac{3}{7}$; pudiéndose, por tanto, escribir:

$$\frac{5}{8} < \sqrt{\frac{3}{7}} < \frac{6}{8}$$

Ejemplo: Hallar la raíz cuadrada de 3,141592 con menor error de $0,1 = \frac{1}{10}$

Multiplicaremos el número dado por el cuadrado de 10 que es 100; del producto obtenido, que es 314,1592, hallaremos la raíz cuadrada entera, que sabemos es igual a la de su parte entera, es decir, a la del número 314, que es 17; por tanto, la raíz que se pide será $\frac{17}{10} = 1,7$, y se podrá escribir:

$$1,7 < \sqrt{3,141592} < 1,8$$

128. CASOS PARTICULARES.- Si los dos términos de un quebrado ordinario son cuadrados perfectos, se obtiene la raíz cuadrada del quebrado, dividiendo la raíz del numerador por la del denominador. Así : $\sqrt{\frac{4}{25}} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{25}} = \frac{2}{5}$.

129. Cuando sólo el denominador es cuadrado perfecto, se obtiene la raíz cuadrada con menor error de una unidad fraccionaria marcada por la raíz cuadrada del denominador, dividiendo la raíz cuadrada entera del numerador por la exacta del denominador.

Si se quiere hallar la raíz cuadrada de $\frac{a}{b^2}$ con menor error $\frac{1}{b}$, diremos, llamando x a la raíz cuadrada entera de a

$$x^2 < a < (x+1)^2$$

y dividiendo por b^2,

$$\frac{x^2}{b^2} < \frac{a}{b^2} < \frac{(x+1)^2}{b^2}$$

y por tanto,

$$\frac{x}{b} < \sqrt{\frac{a}{b^2}} < \frac{x+1}{b}$$

130. Cuando el denominador de un quebrado ordinario no es cuadrado perfecto, se pueden multiplicar los dos términos por él y aplicar la regla anterior.

Así: $$\sqrt{\frac{a}{b}} = \sqrt{\frac{ab}{b^2}} = \frac{\sqrt{ab}}{b}.$$

Luego : para que un quebrado ordinario tenga raíz cuadrada exacta, es necesario y suficiente que sea cuadrado perfecto el producto de sus dos términos.

Si se trata de un número decimal, es preciso, para que tenga raíz cuadrada exacta, que el número que resulta prescindiendo de la coma, suponiendo que el número de cifras decimales sea par (si no lo es se completa con un 0), sea un cuadrado perfecto.

Así : el quebrado ordinario $\frac{150}{6}$ tiene raíz cuadrada exacta porque el producto $6 \times 150 = 900$ es cuadrado perfecto

El número decimal 0,0361 tiene raíz cuadrada exacta, porque 361 es el cuadrado de 19.

131. Un número descompuesto en factores primos sabemos que es cuadrado perfecto o que tiene raíz cuadrada exacta cuando todos los exponentes de sus factores primos son pares y se obtiene la raíz cuadrada dividiendo por 2 todos esos exponentes. Así $\sqrt{2^6.5^8.7^4} = 2^3.5^4.7^2$

EJERCICIOS

I. Justificar que la diferencia entre el cuadrado de dos números naturales consecutivos, es igual al doble del menor mas uno.

II. Con 12 baldosas cuadradas se puede formar un cuadrado? Cuántas sobran ?

III. Eliminadas las que sobran y formando un cuadrado, si ahora quisieramos formar el cuadrado que tuviera una mas por lado. Cuántas nos harían falta ?.

IV. Hallar la raíz cuadrada de 10^2; 10^4; 10^6.

V. Hallar la raiz cuadrada de :

$$\frac{1}{100};\ \frac{64}{100};\ \frac{1}{10^4};\ \frac{25}{10^4};\ \frac{1}{10^6};\ \frac{9}{10^6}.$$

VI. Raiz cuadrada de 735; 1 237 439.

VII. Raiz cuadrada de 2; 375 con menor error por defecto $\frac{1}{1000}$. Cuáles son las raices por defecto y por exceso de esos números con menor error de $\frac{1}{10}$; $\frac{1}{100}$ y $\frac{1}{1000}$

VIII. Idem de 5,47; 0,038 y 0,007.

IX. Hallar la raiz cuadrada de $\frac{2}{5}$ con menor error de $\frac{1}{7}$

X. Condición para que el número 0,001 309 tenga raiz cuadrada exacta.

XI. Raiz cuadrada por defecto con menor error de $\frac{1}{100}$ de $\pi = 3,141592$ ....

CAPITULO II.

RAZON DE DOS NUMEROS

132. La definición de la multiplicación, exige que el multiplicador sea un número abstracto, siendo el producto de la naturaleza del multiplicando.

Así : 6kg. x 3 = 6kg. + 6kg. + 6kg. = 18 kg.

Esta operación goza de la propiedad conmutativa cuando los factores son números abstractos, pero esta propiedad carece de sentido cuando se trata de números concretos.

De aquí los nombres diferentes que reciben los dos factores y las dos operaciones inversas, que se resuelven mediante la división.

La primera, partición. De acuerdo con el nombre División se conocen como datos el producto (concreto) y el multiplicador (abstracto) y se obtiene como resultado el multiplicando.

Ejemplo: $\dfrac{18 \text{ kg.}}{3} = 6 \text{ Kg.}$

La segunda, medición. De acuerdo con el nombre cociente (quoties, cuántas veces ?) son los datos, el producto (concreto) y el multiplicando (concreto); el resultado es el multiplicador (abstracto).

$$\frac{18 \text{ Kg.}}{6 \text{ Kg.}} = 3$$

El número abstracto multiplicador, que hemos obtenido se llama:

1o. Medida del producto cuando se toma el multiplicando como unidad.

2o. Razón del producto al multiplicando. En este caso, así como el cociente recibe el nombre de razón, el dividendo y el divisor se llaman respectivamente antecedente y consecuente.

Estos nombres se aplican al caso de que los números sean abstractos, por lo que, en general, se entiende por razón de dos números el cociente de su división. La razón por cociente de los números 32 y 8 es 4, pues:

$$\frac{32}{8} = 4 \quad \text{de donde} \quad 32 = 8 \times 4$$

o sea, que el antecedente, es siempre igual al producto del consecuente por la razón. La razón de 0'6 y $\frac{3}{2}$ es $\frac{0'6}{3} = 0'4$

Dos números pueden compararse no solamente por cociente sino tambien por diferencia. La razón por diferencia de los números 32 y 8 es $32 - 8 = 26$.

Las razones por cociente tienen las mismas propiedades fundamentales que las razones-quebrados; nosotros nos ocuparemos de las más interesantes.

133. TEOREMA.- Una razón no se altera de valor, cuando se multiplican o dividen sus dos términos por un mismo número.

Sea la razón $\frac{a}{b}$, si multiplicamos por el número n sus dos términos, decimos que se verificará:

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot n}{a \cdot n}$$

En efecto: Representemos por c el valor de la razón $\frac{a}{b}$ y tendremos $\frac{a}{b} = c$, de donde se deduce $a = b \cdot c$; si los dos miembros de esta igualdad se multiplican por n, resultará : $a.n = b.n.c$ y de aquí $\frac{an}{bn} = c$, como se deseaba demostrar.

Si en vez de multiplicar por n los dos miembros de la igualdad $a = b.c$, los dividimos, resultará: $a{:}n = (b{:}n) . c$

y por tanto, $\frac{a:n}{b:n} = c$

Consecuencia: Las razones por cocientes se simplifican y reducen a un consecuente común, siguiendo las mismas reglas que se dieron para simplificar y reducir a un común denominador los quebrados.

Así : $\frac{a}{b}$, $\frac{a'}{b'}$, $\frac{a''}{b''}$ son tres razones que, reducidas a un común consecuente, se transformarán en las siguientes:

$$\frac{a}{b} = \frac{a\,b'\,b''}{b\,b'\,b''} ; \frac{a'}{b'} = \frac{a'bb''}{b'bb''} ; \frac{a''}{b''} = \frac{a''\,b\,b'}{b''\,b\,b'}$$

OPERACIONES CON LAS RAZONES POR COCIENTE

134. Sumar y restar razones.- Si las razones dadas tienen el mismo consecuente, se suman o restan los antecedentes y a la suma o diferencia se le pone el consecuente común.

Así : $\frac{a}{b} + \frac{a'}{b} = \frac{a + a'}{b}$

En efecto: Si hacemos $\frac{a}{b} = c$ y $\frac{a'}{b} = c'$ se tendrá:

$$a = b.c$$
$$a' = b.c'$$

sumando y restando estas igualdades miembro a miembro, resultará:

$$a \pm a' = b(c \pm c')$$

de donde $\frac{a \pm a'}{b} = c \pm c' = \frac{a}{b} \pm \frac{a'}{b}$

como se deseaba probar.

Si no tuvieran el mismo consecuente se comienza por reducirlas a un común consecuente.

135. Multiplicación de razones.- Para hallar el producto de

dos razones por cociente, se multiplican los antecedentes y los consecuentes y se divide el primer producto por el segundo.

Sean las razones $\frac{a}{b}$ y $\frac{a'}{b'}$ tendremos:

$$\frac{a}{b} \times \frac{a'}{b'} = \frac{a \times a'}{b \times b'}$$

En efecto: Si $\frac{a}{b} = c$ y $\frac{a'}{b'} = c'$, resultará:

$$a = b.c$$
$$a' = b'.c'$$

multiplicando estas igualdades miembro a miembro, tendremos:

$$a.a' = (b.b')\ (c.c')$$

y por tanto, $\frac{a.a'}{b.b'} = c.c' = \frac{a}{b} \times \frac{a'}{b'}$ como se quería demostrar.

Dos razones se llaman inversas, cuando el antecedente de la una es el consecuente de la otra y recíprocamente.

Así, las razones $\frac{a}{b}$ y $\frac{b}{a}$ son inversas, y evidentemente su producto es igual a la unidad, puesto que se tiene :

$$\frac{a}{b} \times \frac{b}{a} = \frac{a \times b}{b \times a} = 1$$

136. Para elevar una razón a una distancia, se elevan a dicha potencia el antecedente y el consecuente.

Así: $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \ldots (n \text{ veces}) = \frac{a^n}{b^n}$

137. Para dividir dos razones, se multiplica la razón el,

vidiendo por la inversa del divisor y tambien pueden dividirse término a término.

Sean las razones $\frac{a}{b}$ y $\frac{a'}{b'}$, decimos que $\frac{a}{b} : \frac{a'}{b'} =$

$\frac{a}{b} \times \frac{b'}{a'} = \frac{a \times b'}{b \times a'}$.

Es $\frac{a \cdot b'}{b \cdot a'}$ el cociente, porque multiplicado por $\frac{a'}{b'}$ divisor, se obtiene

$$\frac{a \times b'}{b \times a'} \times \frac{a'}{b'} = \frac{a}{b}$$

que es el dividendo.

Tambien se tiene $\frac{a}{b} : \frac{a'}{b'} = \frac{a : a'}{b : b'}$ toda vez que esta razón (cociente), multiplicada por $\frac{a'}{b'}$ (divisor), da un producto igual a $\frac{a}{b}$ (dividendo)

138. Para extraer la raíz de un grado cualquiera de una razón, basta extraer la raíz del mismo grado de cada uno de sus términos.

Así: $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ toda vez que $\left(\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\right) = \frac{a}{b}$.

EJERCICIOS

I. Comprobar que la razón $\frac{\frac{4}{5}}{\frac{2}{3}}$ no varía multiplicando sus dos términos por $\frac{7}{8}$.

II. Reducir a un común consecuente las razones $\frac{0'6}{\frac{2}{7}}$, $\frac{\frac{4}{5}}{0'3}$ y obtener su suma.

III. Cuál de las dos razones anteriores es la mayor ?

IV. Hallar el producto y cociente de $\frac{0'2}{1'5}$ y $\frac{\frac{3}{2}}{0'4}$.

V. Elevar al cuadrado $\frac{\frac{5}{3}}{\frac{3}{4}}$.

CAPITULO III.

PROPORCION

139. Se llama proporción geométrica a la igualdad de dos razones por cociente. Ejemplo:

$$\frac{16}{4} = \frac{32}{8}$$

El primero y tercero se llaman antecedentes; el segundo y cuarto consecuentes. El primero y cuarto se llaman extremos y el segundo y tercero medios.

140. TEOREMA.- El producto de los extremos es igual al de los medios.

Sea la proposición: $\frac{16}{4} = \frac{32}{8}$, multiplicando ambos miembros por el producto de los consecuentes 4×8, se obtiene

$$\frac{16 \times 8 \times 4}{4} = \frac{32 \times 4 \times 8}{8} \text{ o sea } 16 \times 8 = 32 \times 4$$

Recíprocamente, si el producto de dos números es igual al producto de otros dos, con los cuatro, se puede formar una proporción, siendo extremos los factores de un producto y medios los del otro.

Pues si,

$$16 \times 8 = 32 \times 4$$

Dividiendo los dos miembros de la igualdad por 8×4 se tendrá:

$$\frac{16 \times 8}{8 \times 4} = \frac{32 \times 4}{8 \times 4} \text{ ó } \frac{16}{4} = \frac{32}{8}$$

En toda proporción se pueden permutar los medios y los extremos, obteniendo otra proporción, así:

$$\frac{2}{5} = \frac{6}{15} \qquad \frac{15}{5} = \frac{6}{2}$$

Si el valor de un extremo de una proporción lo desconocemos llamándolo x se tendría, por ejemplo:

$$\frac{x}{4} = \frac{32}{8} \text{ de donde } (140) \quad x.8 = 32.4 \qquad (1)$$

y por tanto, dividiendo por 8 los dos miembros de la igualdad (1):

$$x = \frac{32 . 4}{8} = 16$$

de donde deducimos, que un extremo en una proporción, es igual al producto de los medios dividido por el otro extremo.

Análogamente, si desconociéramos el valor de un medio, se obtendría dividiendo el producto de los extremos por el medio conocido. A un término cualquiera de una proporción se le denomina cuarta proporcional.

141. Se llama proporción continua la que tiene iguales sus términos medios.

Así: $\frac{a}{x} = \frac{x}{b}$ es una proporción continua.

Aplicando a ella el teorema fundamental, tendremos:

$$x^2 = a . b . \qquad (2)$$

En la proporción continua se puede hallar el valor del término medio, pues de la igualdad (2) se deduce:

$$x = \sqrt{a . b}$$

Este número x se llama medio proporcional o geométrico entre a y b, y es igual a la raíz cuadrada de su producto.

Los a y b reciben el nombre de tercera proporcional.

Así: $\frac{4}{x} = \frac{x}{9}$; el valor $x = \sqrt{4 \cdot 9} = \sqrt{36} = 6$

y se podrá escribir : $\frac{4}{6} = \frac{6}{9}$.

Media geométrica entre n números, es la raíz enésima de su producto.

Si los números son a, b, c, d... y llamamos x a la media geométrica, se tendrá:

$$x = \sqrt[n]{a \cdot b \cdot c \cdot d \ldots}$$

142. Toda alteración en el orden de los términos de una proporción que permita asegurar que el producto de los extremos sigue siendo igual al de los medios, transforma la proporción en otra. Se podrán, pues, permutar los extremos y los medios y cambiar los medios por los extremos.

De aquí se deduce que una proporción se puede escribir de ocho modos diferentes:

Si la proporción es $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ se podrá escribir aún de otro modo conservando el Termino a en primer lugar; así: $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ si hacemos que el primer término sea c, el último deberá ser b, y por tanto se escribirá $\frac{c}{a} = \frac{d}{b}$ o $\frac{c}{d} = \frac{a}{b}$

143. Si dos proporciones tienen una razón común con las otras dos razones, se podrá formar otra proporción.

Si tenemos: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ y $\frac{a}{b} = \frac{m}{n}$, como dos números iguales a un tercero son iguales entre si, se podrá escribir:

$$\frac{c}{d} = \frac{m}{n}$$

144. En toda proporción, la suma o diferencia de los antedecentes es a la suma o diferencia de los consecuentes, como un antecedente es a su consecuente.

Sea la proporción $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, decimos que tambien serán proporciones estas dos, formadas como dice el teorema enunciado:

$$\frac{a + c}{b + d} = \frac{a}{b} \quad (1) \qquad y \qquad \frac{a - c}{b - d} = \frac{a}{b} \quad (2)$$

En efecto: Si hacemos $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = q$ tendremos:

$a = b.q$ } sumando y restando miembro a miembro estas igual
$c = d.q$ } dades, resulta:

$a \pm c = (b \pm d)q$

de donde, $\frac{a \pm c}{b \pm d} = q = \frac{a}{b}$

Como se quería probar.

145. <u>En toda proporción, la suma o diferencia de antecedente y consecuente de la primera razón, es a la suma o diferencia de los términos de la segunda razón, como un antecedente es al otro o como un consecuente es al otro.</u>

Sea la proporción: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ decimos que se verificará también:

$$\frac{a \pm b}{c \pm d} = \frac{a}{c} = \frac{b}{d} \quad (3)$$

En efecto: Si en la proporción dada se permutan los medios, tendremos:

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$$

y aplicando a ésta, el teorema (144) , resultará la (3).

De las proporciones (3) se deduce: $\frac{a + b}{a - b} = \frac{c + d}{c - d}$

Luego: En toda proporción la suma de los términos de la primera razón, es a su diferencia, como la suma de los términos de la segunda razón es a la suya.

146. TEOREMA.- Si se multiplican términos a término varias proporciones, los productos forman una proporción.

Sean las proporciones: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, $\frac{a'}{b'} = \frac{c'}{d'}$ y $\frac{a''}{b''} = \frac{c''}{d''}$

multiplicando miembro a miembro estas igualdades, los productos serán iguales, y tendremos:

$$\frac{a}{b} \times \frac{a'}{b'} \times \frac{a''}{b''} = \frac{c}{d} \times \frac{c'}{d'} \times \frac{c''}{a''}$$

y efectuando: $\frac{a \, . \, a' \, . \, a''}{b \, . \, b' \, . \, b''} = \frac{c \, . \, c' . \, c''}{d \, . \, d' . \, d''}$

147. Si se elevan a una misma potencia los cuatro términos de una proporción, los resultados forman otra.

Así de la proporción $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ resulta elevando sus cuatro términos a la potencia n, esta otra: $\frac{a^n}{a^n} = \frac{c^n}{d^n}$.

148. Si se dividen término a término dos proporciones con los cocientes, se puede formar una proporción.

Sean las proporciones: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ y $\frac{a'}{b'} = \frac{a'}{c'}$.

Si se dividen miembro a miembro estas dos igualdades, resultará:

$$\frac{a}{b} : \frac{a'}{b'} = \frac{c}{d} : \frac{c'}{d'}$$

y efectuando las divisiones, tendremos:

$$\frac{a : a}{b : b} = \frac{c : c'}{d : d'}$$

149. Si de los cuatro términos de una proporción se extrae una misma raíz, los resultados formarán una proporción

Sea la proporción $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$; si de los dos miembros de esta igualdad se extrae la raíz enésima, tendremos:

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \sqrt[n]{\frac{c}{d}}$$

y efectuando, resultará :

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \frac{\sqrt[n]{c}}{\sqrt[n]{d}}$$

150. Serie de razones iguales es la expresión de la igualdad de tres o más razones.

Así: $\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} = \frac{a''}{b''} = \ldots = c \qquad (1)$

151. En toda serie de razones iguales, la suma de los antecedentes es a la suma de los consecuentes, como un antecedente es a su consecuente.

De la serie (1) se deducen las siguientes igualdades:

$$\left.\begin{array}{l} a = b \cdot c \\ a' = b' \cdot c \\ a'' = b'' c \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \text{ sumando miembro a miembro,}$$

$$a + a' + a'' + \ldots = (b + b' + b'' + \ldots) c$$

de donde, $\frac{a + a' + a'' + \ldots}{b + b' + b'' + \ldots} = c = \frac{a}{b}$.

152. Se llama media diferencial o aritmética entre varios números al cociente de dividir su suma por el número de ellos.

Así, la media diferencial entre a, b y c, será :

$$\frac{a + b + c}{3}$$

Este número tiene la propiedad de estar comprendido entre el mayor y el menor de los números dados.

Las medias diferenciales son números que tienen grandes aplicaciones en las ciencias físicas y sociales.

La temperatura media entre las máximas de todos los días de un mes, por ejemplo, se obtendrá dividiendo la suma de las máximas diarias por 30.

El jornal medio de un obrero, al cabo de un año, se obtiene dividiendo por 12 la suma de los jornales medios de los doce meses del año.

EJERCICIOS

I. Escribir de todos los modos posibles la proporción que existe entre números 2, 9, 6 y 3.

II. Hallar el medio geométrico entre 2 y 32 y escribir la proporción. Idem entre 4, 6 y 9.

III. Comprobar que de la proporción $\frac{7}{3} = \frac{28}{12}$ se deduce

$$\frac{7 + 28}{3 + 12} = \frac{7}{3} \quad \text{y tambien} \quad \frac{28 - 7}{12 - 3} = \frac{7}{3}$$

IV. Hallar la media aritmética de las temperaturas máximas de una semana en la que el Domingo registró el termómetro $34^o.8$, el lunes $36^o.9$, el martes $35^o.4$, el miércoles 37^o, el jueves $36^o.9$, el viernes $37^o.2$ y el sábado $36^o.4$.

CAPITULO III

RAZON POR COCIENTE DE DOS CANTIDADES HOMOGENEAS

153. Medir cantidades de una magnitud, es hallar los números abstractos que resultan, al compararlas por cociente con la cantidad-tipo homogénea con ellas, que elejimos como unidad o módulo.

Cualquiera de estos números abstractos recibe el nombre de *razón* de dos cantidades homogéneas.

Si las cantidades fueran por ejemplo los pesos P_1 ; P_2; P_3; y la unidad de peso P_u; matemáticamente indicaríamos que P_1; P_2; P_3 los medimos con P_u, así :

$$\frac{P_1}{P_u} = n; \frac{P_2}{P_u} = n'; \frac{P_3}{P_u} = n''$$

Las razones serían : n ; n'; n''

Si $\frac{P_1}{P_u} = 3$ de ello deduciríamos que

$$P_1 = P_u + P_u + P_u = P_u .3$$

es decir, que la cantidad P_1 se puede descomponer en tres sumandos iguales a P_u .

En el caso de ser $\frac{P_2}{P_u} = \frac{3}{4}$ diremos que

$$P_2 = P_u . \frac{3}{4} = \frac{P_u}{4} . 3 = \frac{P_u}{4} + \frac{P_u}{4} + \frac{P_u}{4}$$

o sea que P_2 se puede descomponer en 3 sumandos iguales a la cuarta parte de la unidad P_u .

Por último si $\frac{P_3}{P_u}$ fuera inconmensurable, ello nos expresaría que P_3 , no puede descomponerse en partes alícuotas de la unidad P_u . En otros términos, que P_3 no contiene a la unidad ni a ninguna de sus partes alícuotas. (Resultado que no lograríamos alcanzar mediante nuestros sentidos, por su limitación.)

El concepto del número inconmensurable como resultado de medir, lo podemos adquirir por medio de la inteligencia, al estudiar el interesantísimo caso geométrico de la medida de la diagonal d del cuadrado con su lado 1 como unidad. Esta medida $\frac{d}{1} = \sqrt{2}$ se deduce de la relación debida a Pitágoras que enlaza el cuadrado de la medida de la hipotenusa de un triángulo rectángulo con los cuadrados de los números que miden los catetos. Así ; (fig. No.4) sabemos que en el cuadrado ABCD

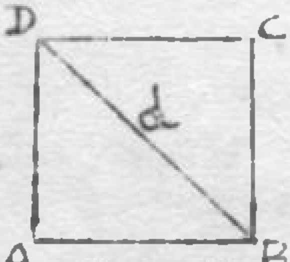


Fig.-4

$$d^2 = 1^2 + 1^2 = d1^2$$

o sea que $\frac{d^2}{1^2} = 2$ de donde resulta extrayendo la raíz cuadrada.

$$\frac{d}{1} = \sqrt{2}$$

Este número es inconmensurable o irracional, puesto que no existe valor natural, igual a $\sqrt{2}$, ya que, está comprendido entre $1 < \sqrt{2} < 2$ y tampoco podemos encontrar un número racional fraccionario

(1) $\frac{a}{b}$ por ejemplo, para el que se obtenga que $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ lo que implicaría, que fuera $2 = \frac{a^2}{b^2}$ y como sabemos que siendo $\frac{a}{b}$ una fracción irreducible a y b son primos entre sí y por (109- 2do. Corolario) a^2 y b^2 tambien lo serán, no podría verificarse la igualdad (1) cuyo primer término, es un número natural y cuyo segundo término es una fracción irreducible.

Números como $\sqrt{2}$, que ni son números naturales, ni fraccionarios se les conoce con el nombre de inconmensurables o irracionales. Para definirlos necesitamos el concurso de dos sucesiones de números que converjan hacia él o sea que lo tengan por límite común. Esto les sucede a las sucesiones de valores por exceso y por defecto que sabemos obtener de $\sqrt{2}$ con menor error de 1 ; $\frac{1}{10}$; $\frac{1}{100}$ etc.

$$1 < \sqrt{2} < 2$$
$$1,4 < \sqrt{2} < 1,5$$
$$1,41 < \sqrt{2} < 1,42$$

formando los valores por defecto, una sucesión creciente

$$1 < 1,4 < 1,41 \ \ldots\ldots\ldots < \sqrt{2}$$

de términos menores que $\sqrt{2}$ y los valores por exceso otra sucesión decreciente

$$2 > 1,5 > 1,42 \ \ldots\ldots\ldots > \sqrt{2}$$

una y otra tienden o converjen a la constante $\sqrt{2}$ que así definen.

Los primeros valores, forman una sucesión creciente de términos inferiores a $\sqrt{2}$ y los segundos constituyen otra sucesión decreciente de valores superiores a $\sqrt{2}$, siendo la diferencia entre los dos primeros términos que comprenden a $\sqrt{2}$ la unidad y entre los dos segundos $\frac{1}{10}$ y así sucesivamente.

Ahora bien, si en (1) reemplazamos $\sqrt{2}$ por $\frac{d}{1}$ se verificarán las limitaciones que siguen:

$$1 < \frac{d}{1} < 2 \quad \text{o sea} \quad 1.1 < d < 21$$

$$1,4 < \frac{d}{1} < 1,5 \quad \text{o sea} \quad 1.1,4 < d < 1.\ 1,5$$

$$1,41 < \frac{d}{1} < 1,42 \quad \text{o sea} \quad 1.1,41 < d < 1.\ 1,42$$

es decir, que a la diagonal d, tienden por defecto y por exceso los segmentos productos del lado 1 unidad, por los números de las sucesiones que definen $\sqrt{2}$ o sea que la diagonal, es el límite común de estos segmentos lo que nos permite escribir:

$$(1)\quad d = 1 \;.\; \sqrt{2}$$

Con ésta última igualdad, queda establecido en todos los casos el teorema siguiente: La razón por cociente de dos cantidades homogéneas es el número abstracto, por el cual es preciso multiplicar la segunda para obtener la primera o sea que expresa la medida de la primera, con la segunda como unidad.

En general, si A es una cantidad y A' otra homogénea con ella, el símbolo

(2) $\frac{A}{A'}$ representa un número n. Este número abstracto es la razón o medida de A con A' como unidad.

De (2) sabemos que se obtiene:

$A = A' \,.\, n$ es decir, que si A es una area y $A' = 1\ m^2$ y $n = 5$, se tendrá :

$$A = 1\ m^2 \;.\; 5 = 5\ m^2$$

La expresión de la cantidad A por su medida, acompañada de la naturaleza de la unidad, recibe el nombre de número concreto.

Vamos a demostrar el importantísimo teorema que establece, el nexo o puente entre la aritmética del número abstracto y la del número concreto, que se enuncia así:

154. TEOREMA.- La razón K, de dos cantidades $\frac{A}{A'}$ homogéneas es igual, a la razón de los números que las miden, con una unidad arbitraria U, homogénea con las cantidades.

Sea U, esa unidad que elejimos arbitrariamente y midamos con ella, A y A'; por hipótesis se establece:

$$\frac{A}{A'} = K \quad \text{siendo} \quad \frac{A}{U} = n;\ \frac{A'}{U} = n'$$

de donde: $A = U.\, n$ y $A' = U.\, n'$

por cuyo cociente :

$$\frac{A}{A'} = \frac{U.n}{U.n'} = K$$

es decir, que $U.n = U\ (n'\ .\ K)$ igualdad que exije la de los números :

$$n = n'K \quad ó \quad K = \frac{n}{n'}$$

por lo que $\frac{A}{A'} = K = \frac{n}{n'}$ según queríamos demostrar.

APLICACION:- La altura de un edificio A se puede medir con la de otro A', pues para ello nos bastará elejir la unidad el metro por ejemplo y si

$$\frac{A}{1m} = 28 \quad y \quad \frac{A'}{1m.} = 12 \text{ se tendrá que}$$

$$\frac{A}{A'} = \frac{28}{12} = \frac{7}{3} \quad \text{o sea} \quad A = A' . \frac{7}{3}$$ es decir, que A son los 7 tercios de A' .

EJERCICIOS

I. Si la distancia de Ciudad Trujillo a Santiago de los Caballeros es de 175 km. y la de Ciudad Trujillo a Boca Chica es de 35 km. Cuál es la distancia de Ciudad Trujillo a Santiago, tomando como unidad esta última ?.

II. Siendo la longitud de una circunferencia, tomando su diámetro como unidad el número inconmensurable π y conocido su valor aproximado

$\pi \sim 3,14\ 15\ 92$ ($\sim$) Se lee : aproximado a

hallar la longitud de la circunferencia de 1 metro de diámetro, por defecto y por exceso, con menor error de un decimetro; de un centimetro; de un milimetro y de una micra.

CAPITULO IV

MAGNITUDES PROPORCIONALES

Los caracteres que definimos como magnitudes matemáticas, se presentan frecuentemente en la naturaleza relacionados de tal manera, que las cantidades de una de ellas, dependen de las de otra o de otras.

Así sucede por ejemplo, con el dinero y las longitudes de las telas ya sean de distinta o de la misma calidad.

A cada longitud de tejido, le corresponderá una cantidad de dinero. Ahora bien, en el caso de ser el tejido de una misma calidad, observamos que el largo, varía como el dinero y recíprocamente.

O sea, que si dos longitudes son iguales, los valores en pesos (moneda) que a ellas corresponden tambien lo son, y que si una longitud, es suma de otras, el dinero que cuesta es la suma de lo que costaban cada uno de los sumandos.

EN GENERAL.- Dos magnitudes para las que se pueden establecer la correspondencia entre sus cantidades variables, en la igualdad y la suma se denominan directamente proporcionales o sencillamente proporcionales.

Ello implicaría tambien, siguiendo nuestro ejemplo anterior, que si a 1 metro le correspondiesen \$2.- a (1 m.)2 le corresponderían (\$2).2 y en general que a "n" veces 1 m. le corresponden "n" veces \$2.00.

Lo que acabamos de indicar se puede escribir en forma de tabla, designando por L la magnitud longitud de tela y por D el dinero y por estas letras con el mismo subindice, los valores que se corresponden.

L	D
L_1 = 1 metro	D_1 = RD\$ 2.00
L_2 = 2 metros	D_2 = 4.00
L_3 = 5 metros	D_3 = 10.00
....	....
....	....
L_n = (1 metro).n	D_n = (\$2.).n

De la tabla de números concretos, expresión de cantidades de L y D, se podrá pasar a esta otra tabla, de sus medidas - o números abstractos, resultados de compararlas con dos unidades, metro y peso (moneda) respectivamente.

$\frac{L}{1m.} = x$	$y = 2x$	$\frac{D}{\$1.-} = y$
1	- - - - - - - - - - - - - - - - - -	2
2	- - - - - - - - - - - - - - - - - -	4
5	- - - - - - - - - - - - - - - - - -	10 (1)
.....	....	.....
.....	....	.....
n	- - - - - - - - - - - - - - - - - -	2n

En las matemáticas, cuando una cantidad varía dependiendo sus valores de las de otra, se le denomina función de esa otra. Función, es por consiguiente, toda cantidad variable dependiente de otra. A esta última, la denominamos variable independiente, porque es la cantidad que recibe valores arbitrarios.

A la variable dependiente o función, se le suele representar por "y" y la independiente por la letra x.

Enlaces sencillos funcionales de x, son por ejemplo entre otros:

$$y = 3 + x \quad \acute{o} \quad y = 2x \quad \acute{o} \quad y = \frac{4}{x}$$

Estas mismas leyes o enlaces, en formas mas generales los escribimos así:

$$y = a + x \quad \acute{o} \quad y = kx \quad \acute{o} \quad y = \frac{k}{x}$$

En el caso de las magnitudes proporcionales vamos a demostrar que la ley funcional que las rige es:

$y = k.x$, llamándose a K constante de proporcionalidad.

En el ejemplo que venimos estudiando, si por "y" se designa la cantidad de dinero y por "x" las medidas de las longitudes, esta ley toma la forma $y = 2x$ en la cual 2 es la constante de proporcionalidad. Si asignamos a "x" los valores de la tabla (1), obtendríamos para cada uno el correspondiente en la segunda columna.

OTROS EJEMPLOS. En los cuerpos homogéneos, volumen y peso son proporcionales o sea que el volumen, varía como el peso; ello nos permitiría, como lo acabamos de hacer con los valores correspondientes de las magnitudes dinero y longitud del ejemplo anterior establecer una tabla de correspondencia, entre sus cantidades. Designemos por V y P a las magnitudes, volumen y peso, y por estas mismas letras mayúsculas con igual subíndice numérico, a las cantidades que se corresponden. La tabla la podemos escribir como sigue:

V		P
V_1	....	P_1
V_2	....	P_2
V_u	....	P_3
V_4	....	P_u
V_5	....	P_5
	....	
	....	
V_n	....	P_n

En esta tabla vemos, que si dos cantidades de volumen son iguales, los pesos que les corresponden son iguales, también comprobamos, que si un volumen es suma de dos volúmenes, su peso correspondiente, será la suma de los pesos que corresponden a los volúmenes sumandos; es decir, que a un volumen, por ejemplo el $V_{10} = V_3 + V_4$, le corresponderá el $P_{10} = P_3 + P_4$. Lo expresamos, abreviadamente, diciendo que existe correspondencia en la suma.

Si elegimos una unidad para medir los volúmenes la V_u y otra unidad para medir los pesos la P_u, podríamos escribir la tabla de las medidas que se corresponden, así :

$\frac{V}{V_u}$		$\frac{P}{P_u}$
v_1	....	p_1
v_2	....	p_2
1	....	p_3
v_4	....	1
v_5	....	p_5
	....	
	....	
v_n	....	p_n

<u>En los cuerpos no homogéneos, volumen y peso no son directamente proporcionales.</u>

En geometría estudiamos, que si dos rectas del plano se cortan por un sistema de rectas paralelas, los segmentos que se corresponden, son proporcionales. Este es un ejemplo, en el cual las magnitudes proporcionales, son homogéneas. También en geometría se observa, que a cada arco de circunferencia, le corresponde una <u>cuerda</u>, demostrándose la correspondencia en <u>la igualdad</u>, pero no en <u>la suma</u>, pues a un arco, suma de dos arcos no le corresponde como cuerda, un segmento, suma de las cuerdas de los arcos sumandos. Los arcos y sus cuerdas por consiguiente no son proporcionales. En mecánica, se ofrece entre otras como ejemplo de proporcionalidad directa, el de las magnitudes tiempo y espacio en los movimientos uniformes.

La definición de magnitudes directamente proporcionales fundada, no en la correspondencia biunívoca en la igualdad y el cociente, es la que vamos a seguir en la generalización de nuestros razonamientos. De ella se deduce el nombre, de magnitudes proporcionales.

156. Dos magnitudes cuyas cantidades variables dependen las de una, de las de la otra, se dice que varían proporcionalmente, o que son directamente proporcionales, cuando a un valor fijo de la primera, le corresponde siempre el mismo valor de la segunda, y además, la razón de dos valores cualesquiera de la primera, es igual a la razón de los valores correspondientes de la segunda.

Designemos por Y y X las magnitudes proporcionales y escribámos las siguientes tablas de las cantidades que se corresponden y de sus valores numéricos o medidas con las unidades Y_u y X_u, unidades que pueden o no corresponderse. (En nuestra tabla no se corresponden).

Y	X	$\frac{Y}{Y_u} = y$	$\frac{X}{X_u} = x$
Y_1	X_1	y_1	x_1
Y_2	X_2	y_2	x_2
Y_u	X_p	1	x_p
Y_h	X_u	y_p	1
...	...	...	...
...	...	...	...
Y_n	X_n	y_n	x_n
...	...	...	...

Por definición se tendrá:

$$\frac{Y_1}{Y_2} = \frac{X_1}{X_2} \quad \text{y como:} \quad \frac{Y_1}{Y_2} = \frac{y_1}{y_2} \quad \text{y} \quad \frac{X_1}{X_2} = \frac{x_1}{x_2}$$

se verificará:

$$(1) \quad \frac{y_1}{y_2} = \frac{x_1}{x_2} \quad \text{de la que se deduce} \quad \frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} \quad (2)$$

permutando los medios en (1).

Los valores de X_1 y X_2 los hemos elegido arbitrariamente luego, refiriendo la (2) a otros valores, siempre se verificará:

$$\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} = \ldots\ldots\ldots = \frac{y_n}{x_n} = K$$

o sea sin particularizar valores $\frac{y}{x} = K$ que es la ley funcional de la proporcionalidad directa, $y = K \cdot x$ pudiendose enunciar el importante:

157. TEOREMA.- Si dos magnitudes son directamente proporcionales, la razón de dos valores numéricos correspondientes, es constante.

158. De aquí se deduce el siguiente corolario : Que si se multiplica el valor de una cantidad por un número, el correspondiente de otra directamente proporcional con ella, quedará multiplicado por el mismo número.

159. LA MEDIDA DE MAGNITUDES DIRECTAMENTE PROPORCIONALES. Sean las magnitudes proporcionales A y B y U la cantidad -unidad de A a la cual le corresponde V en las B. Si la cantidad V, se toma como unidad de las B, por definición se verificará entre las cantidades de la siguiente tabla:

A	B	A/U	B/V	
A_1	B_1	a_1	b_1	$a_1 = b_1$
A_2	B_2	a_2	b_2	$a_2 = b_2$
....	....	....	....	....
....	....	....	....	....
U	V	1	1	$1 = 1$
A_n	B_n	a_n	b_u	$a_n = b_u$
....	....	....	....	....

$$\frac{A_1}{U} = \frac{B_1}{V} \; ; \; \frac{A_2}{U} = \frac{B_2}{V}; \; \ldots\ldots\ldots\ldots \frac{A_n}{U} = \frac{B_n}{V}$$

Estas igualdades, son la expresión simbólica del importantísimo teorema que dice: Las medidas de cantidades correspondientes, de dos magnitudes proporcionales, son iguales, cuando las unidades elegidas, son dos valores correspondientes.

La aplicación de esta verdad, ha aportado a la Ciencia, inmensos beneficios, en el terreno teórico y práctico, permitiéndonos sustituir para los efectos de hallar las medidas, una magnitud por otra proporcional.

Circunscribiéndonos por ahora al aspecto práctico, podemos afirmar que los limbos graduados no tienen otro objeto que el reemplazar las medidas de los ángulos, por la de sus arcos, trazados con un radio constante, previa la correspondencia de la unidad angular, grado sexagesimal por ejemplo, con la unidad de arcos el arco de un grado que le corresponde.

160. ESCOLIO.- La razón de los valores numéricos correspondientes de dos magnitudes proporcionales, que hemos demostrado que es constante, valdrá uno, al cumplir "U" y "V" la condición que establece el teorema (159)

Cuando las unidades "U" y "V" no se corresponden, hemos demostrado que la razón entre las medidas que se corresponden es constante, es decir que:

$$\frac{y_n}{x_n} = K$$

de donde se deduce:

$$Y_n = K \cdot X_n$$

sencilla relación que nos enseña a encontrar los valores numéricos de las cantidades A ó medidas con U, que corresponden, a las medidas de B con V, mediante la multiplicación de estas últimas, por un número constante K.

Esta constante, recibe el nombre de constante de variación o de proporcionalidad entre las dos magnitudes y nos muestra dentro de la variación proporcional, la intensidad de la dependencia entre sus cantidades.

Ejemplo 1ro.: Si dos polígonos son semejantes y dos lados homólogos miden $AB = 6m.$ y $A_1B_1 = 3m.$, se tendrá que

$$K = \frac{A\ B}{A_1B_1} = \frac{6m}{3_m} = 2$$

En este caso, K es el número abstracto que expresa la medida de AB con A_1B_1 como unidad.

Ejemplo 2do.: Si un auto recorre con movimiento uniforme 400 km. en 5 horas, la constante de variación es

$$\frac{400}{5} = 80 = K$$

Espacio	Tiempo
400 km.	5 horas.

y la razón por cociente de las dos magnitudes heterogéneas, espacio y tiempo, donde el cociente de sus medidas, es "K", la la escribimos así:

$$\frac{400\ Km.}{5\ horas.} = K\ Km./hora = 80\ Km./hora;$$

aquí "K" es un número que mide una cantidad de una nueva magnitud, en este caso velocidad, compuesta por cociente de dos heterogéneas.

163. MAGNITUDES INVERSAMENTE PROPORCIONALES.- Dos magnitudes se dice que son inversamente proporcionales, cuando a un valor determinado de la primera, corresponde un valor determinado de la segunda, y la razón de dos valores cualesquiera de la primera, es igual a la razón inversa, de los valores correspondientes de la segunda.

Asi en un movimiento uniforme, el tiempo necesario para recorrer una distancia, es inversamente proporcional a la velocidad.

Sean las magnitudes Y y X que suponemos inversamente proporcionales; sean Y_1 y X_1 los valores correspondientes y Y_2 y Y_2 otros dos tambien correspondientes, se tendrá:

$$\frac{Y_1}{Y_2} = \frac{X_2}{X_1}$$

Del mismo modo que en la proporcionalidad directa y conservando las mismas notaciones, obtendremos:

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{x_2}{x_1}$$

y por tanto:

$$x_1 . y_1 = y_2 . x_2 = K$$

Como los valores x_1 y x_2 han sido elegidos arbitrariamente, se puede enunciar el siguiente teorema:

164. TEOREMA.- Si dos magnitudes son inversamente proporcionales, el producto de dos valores numéricos correspondientes, es constante.

De aquí se deduce:

165. COROLARIO. Que si se multiplica el valor de una cantidad por un número, el correspondiente de otra inversamente proporcional con ella, debe quedar dividido por el mismo número.

Si representamos en general por y y x dos valores numéricos correspondientes de dos cantidades inversamente proporcionales, se verificará:

$$x . y = \text{constante} = K$$

La determinación de esta constante es en cada caso necesaria para conocer dentro de la variación inversa, la intensidad de la dependencia de ambas magnitudes.

Cuando el valor de y es igual a 1, el de la constante K es igual al de x.

Con velocidad de 30Km. por hora, se han empleado 6 horas en recorrer una distancia; la constante de la proporcionalidad inversa será $30 \cdot 6 = 180$; con doble velocidad, el tiempo se reducirá a la mitad = 3 horas, y el producto seguirá siendo igual, a 180.

166. MAGNITUDES QUE DEPENDEN DE OTRAS VARIAS. Una cantidad variable, puede depender de otras varias, y se dice, que es proporcional directa o inversamente a cada una de ellas cuando suponiendo constantes todas menos una, la cantidad de que se trata, es proporcional a la que varía directa o indirectamente.

Así; el peso de una barra prismática depende de sus tres dimensiones y además de la naturaleza de la misma (hierro, madera, etc.).

Si suponemos que en una barra de hierro, por ejemplo, permanecen constantes el ancho y el grueso y se duplica el largo, aparecerán dos barras iguales a la primera, y por tanto el peso parecerá duplicado; luego el peso de la barra considerada es directamente proporcional a su largo; del mismo modo se vé, que lo es a su ancho y a su grueso; tambien se vé, que dos barras iguales, una de mármol y otra de hulla, siendo doble el peso, a igualdad de volúmen del mármol, con relación al de la hulla será doble, el de la primera con relación al de la segunda.

167. RAZON DE DOS VALORES DE UNA MAGNITUD PROPORCIONAL A OTRAS VARIAS. Sea M una magnitud que depende de otras varias A, B, C, y D. como puede verse en la tabla que a continuación indicamos :

$$\frac{M}{M_u} \qquad \frac{A}{A_u} \qquad \frac{B}{B_u} \qquad \frac{C}{C_u} \quad \ldots \quad \frac{D}{D_u} \ldots d$$

$$\begin{array}{l} m \ldots\ldots a \ldots\ldots b \ldots\ldots c \ldots\ldots d \\ m_1 \ldots\ldots a_1 \ldots\ldots b_1 \ldots\ldots c_1 \ldots\ldots d_1 \\ m_2 \ldots\ldots a_2 \ldots\ldots b_2 \ldots\ldots c_2 \ldots\ldots d_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

y sean :

valores numéricos correspondientes de ellas y supongamos que la cantidad M es directamente proporcional a A y C, e inversamente proporcional a B y D.

No es posible relacionar directamente m_1 con m_2, pues para pasar de un valor a otro, han variado las cuatro cantidades de que dependen, pero si designamos por m', m'', m''' los valores numéricos de M, cuando los de A, B, y C, pasan sucesivamente de a_1, b_1, c_1, a a_2, b_2, c_2 se tendrá:

$$\begin{array}{llllllllll} & & \text{d} & & \text{i} & & \text{d} & & \text{i} \\ m_1 & \ldots & a_1 & \ldots & b_1 & \ldots & c_1 & \ldots & d_1 \\ m' & \ldots & a_2 & \ldots & b_1 & \ldots & c_1 & \ldots & d_1 \\ m'' & \ldots & a_2 & \ldots & b_2 & \ldots & c_1 & \ldots & d_1 \\ m''' & \ldots & d_2 & \ldots & b_2 & \ldots & c_2 & \ldots & d_1 \\ m_2 & \ldots & a_2 & \ldots & b_2 & \ldots & c_2 & \ldots & d_2 \end{array} \qquad \begin{array}{l} \dfrac{m_1}{m'} = \dfrac{a_1}{a_2} \\ \dfrac{m'}{m''} = \dfrac{b_2}{b_1} \\ \dfrac{m''}{m'''} = \dfrac{c_1}{c_2} \\ \dfrac{m'''}{m_2} = \dfrac{d_2}{d_1} \end{array} \quad (1)$$

Multiplicando miembro a miembro las igualdades (1) tendremos,

$$\frac{m_1 \cdot m' \cdot m'' \cdot m'''}{m' \cdot m'' \cdot m''' \cdot m_2} = \frac{a_1}{a_2}\,\frac{b_2}{b_1}\,\frac{c_1}{c_2}\,\frac{d_2}{d_1}$$

y, simplificando,

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{a_1}{a_2} \cdot \frac{b_2}{b_1} \cdot \frac{c_1}{c_2} \cdot \frac{d_1}{d_2}$$

Lo cual prueba el teorema siguiente: <u>La razón de dos valores numéricos de una magnitud que depende de otras varias, es igual, al producto de las razones directas de los valores correspondientes de las cantidades, con quienes varía en ra-</u>

zón directa, multiplicado, por el producto de las razones inversas de los valores correspondientes. de las cantidades, con quienes varía inversamente.

168. VARIACIONES COMBINADAS.- Matemáticamente expresamos que la variable z es proporcional a la "x" e inversamente - proporcional a la "y" escribiendo:

$$z = \frac{K.x}{y}$$

Si "z" es directamente proporcional a "y" y "x" lo expresaremos así:

$$z = K.y.x$$

EJERCICIOS

I. La Geometría nos enseña que $L = \pi.D$; siendo L la longitud de una circunferencia y D la de su diámetro, 1ro. Que proposición de proporcionalidad se puede enunciar

2do. Escribirla, usando K como constante de proporcionalidad.

3ro. Cual es el valor de K. ?

4to. Quedaría fijado el valor de K. si nos dieran la longitud de una circunferencia y la de su diámetro ?.

II. En los movimientos uniformes, son proporcionales los espacios que recorre un móvil y los tiempos que tarda en recorrerlos. Por eso si se designa por e el espacio y por t el tiempo, su ley vendrá expresada para cada movimiento uniforme así: $e = Kt$.

La constante K enseña la Física que es la velocidad.

En el caso particular de un auto que marcha con movimiento uniforme y ha recorrido 80 km. en 1 hora : 1ro. averiguar, cual es el valor de K. 2do. Escribir con este valor de "K" la ley de proporcionalidad entre espacios y tiempos. 3ro. Si experimentalmente hallamos que en 3/60 de hora recorre 4 km. como se determinaría K, o sea la velocidad en kilómetros por hora ?.

III. El área de un rectángulo, siendo b su base y a su altura, es $A = b.a$. Cuál es la ley de proporcionalidad que enlaza las dimensiones de el mismo, manteniéndose $A = K$, o sea constante. Qué valor tendrá K para el rectángulo de base $b = 5$ cm. y altura $a = 3$ cm.. Si duplicásemos la base, qué valor le correspondería a la altura ?

IV. Averiguar que proporcionalidad enlaza las longitudes que se recorren con velocidad determinada en el movimiento uniforme y los tiempos que se tardan en recorrerlas.

V. Igual pregunta cuando la distancia a recorrer es constante y el movimiento uniforme, entre las velocidades y los tiempos.

VI. Son proporcionales los arcos y sus cuerdas ?.

VII.Son proporcionales los arcos y sus ángulos ?, y el tiempo que se tarda en hacer una obra y el número de obreros ? Que observación debe tenerse en cuenta en este último ejemplo ?.

VIII. Las cantidades de agua que arrojan unos caños por segundo para llenar un depósito y los tiempos que emplean en llenarlo. Son directamente proporcionales ?

IX. El peso de un cubo de una substancia de qué depende ? Qué relación de proporcionalidad le enlaza con las magnitudes de que depende ?.

X. Las raciones que lleva un barco están calculadas para una cierta duración. El tiempo y las raciones que se consumen por tripulante , Qué relación de proporcionalidad las enlaza?

CAPITULO V

APLICACION DE LA PROPORCIONALIDAD A CUESTIONES PRACTICAS DE USO CORRIENTE

REGLAS DE TRES SIMPLE Y COMPUESTA

169. La regla de tres simple sirve para resolver el siguiente problema:

Conocidos dos valores correspondientes de dos cantidades directa o inversamente proporcionales, hallar el valor de una de ellas, correspondiente a un nuevo valor dado a la otra.

La regla de tres se llama directa o inversa, según que las cantidades sean directa o inversamente proporcionales.

170. Regla de tres directa.- Sean A y B dos cantidades directamente proporcionales; supongamos que a_1 y b_1 son dos valores correspondientes y se desea conocer el valor x de B correspondiente al a_2 de A.

Se podrá escribir:

$$\begin{array}{l} a_1 \ldots b_1 \\ a_2 \ldots x \end{array}$$

y tendremos la proporción $\frac{x}{b_1} = \frac{a_2}{a_1}$ de donde $x = b_1 \times \frac{a_2}{a_1}$.

Luego: Se obtiene el valor de la incógnita, multiplicando el valor conocido del mismo género que ella, por la razón directa del nuevo valor de la otra cantidad al que antes tenía.

Ejemplo 1o. Un automóvil recorre 100 Km. en 3 horas y 10 minutos, qué tiempo es preciso para trasladarse de Barcelona a Madrid? (700 Km.).

100 Km... 3 horas 10 minutos
700 Km... x horas

o tambien:

$$\begin{array}{l} 100 \text{ Km.}\ldots 3\frac{1}{6} \text{ horas} \\ 700 \text{ Km.}\ldots x \text{ horas} \end{array}$$

$$\frac{1}{6}\text{ hora} \times \frac{700}{100} = \frac{19}{6}\text{h.} \times 7 = \frac{133}{6}\text{h.} = 22 \text{ horas } 10 \text{ minutos.}$$

Ejemplo 2o. Un automóvil ha recorrido 100 Km. en 3 horas y 10 minutos; para trasladarse de Madrid a Barcelona ha empleado 22 horas y 10 minutos. Cuál es la distancia entre estas capitales ?

$$100 \text{ Km.} \ldots \frac{19}{6} \text{ horas}$$

$$x \text{ Km.} \ldots 22\frac{1}{6} \text{ horas}$$

$$x = 100 \text{ Km.} \times \frac{22\frac{1}{6}}{\frac{19}{6}} = 100 \text{ Km.} \times \frac{\frac{133}{6}}{\frac{19}{6}} = 100 \text{ Km.} \times \frac{133}{19} =$$

$$100 \text{ Km.} \times 7 = 700 \text{ Km.}$$

171. Regla de tres inversa.- Si A y B son dos cantidades inversamente proporcionales y representamos por a_1 y b_1 dos valores numéricos correspondientes, se podrá hallar el valor x de A correspondiente a un nuevo valor b_2 de B.

Se tendrá:

$$\begin{array}{l} a_1 \ldots b_1 \\ x \ldots b_2 \end{array} \quad \text{y por tanto} \quad \frac{x}{a_1} = \frac{b_1}{b_2}$$

de donde, $x = a_1 \times \frac{b_1}{b_2}$.

Luego: se obtiene el valor de la incógnita, multiplicando el valor conocido de su mismo género por la razón inversa del nuevo valor de la otra cantidad, al que antes tenía.

Ejemplo 1o. Con velocidad de 50 Km. por hora, ha recorrido un automóvil una cierta distancia en 5 horas, 15 minutos, qué tiempo empleará en recorrer la misma distancia si la velocidad se hace $2\frac{1}{2}$ veces mayor ?

$$50 \text{ Km.} \ldots 5 \text{ horas, } 15 \text{ minutos.}$$

$$50 \text{ Km.} \times 2\frac{1}{2} \ldots x \text{ horas.}$$

$$50 \text{ Km.} \ldots 5\frac{1}{4} \text{ horas.}$$

$$125 \text{ Km.} \ldots x \text{ horas.}$$

$$x \text{ horas} = 5\frac{1}{4} \text{ hora} \times \frac{50}{125} = \frac{21}{4} \text{ hora} \times \frac{2}{5} =$$

$$\frac{42}{20} \text{ hora} = 2 \text{ horas } 6 \text{ minutos.}$$

Ejemplo 2o. Con velocidad de 50 Km. por hora, ha recorrido un automóvil una cierta distancia en 5 horas, 15 minutos, qué velocidad tendrá que llevar para recorrer la misma distancia, en 2 horas y 6 minutos ?

$$50 \text{ Km.} \ldots \frac{21}{4} \text{ horas.}$$

$$x \text{ Km.} \ldots 2 \text{ horas, } 6 \text{ minutos.}$$

$$x \text{ Km. (velocidad)} = 50 \text{Km.} \times \frac{\frac{21}{4}}{2\frac{1}{10}} = 50 \text{ Km.} \times \frac{\frac{21}{4}}{\frac{21}{10}} =$$

$$50 \text{ Km.} \times \frac{10}{4} = 50 \text{ Km.} \times 2{,}5 = 125 \text{ Km. hora}$$

II. REGLA DE TRES COMPUESTA

172. Su objeto es: Conocidos los valores correspondientes de varias cantidades directa o inversamente proporcionales, hallar el valor de una de ellas cuando se dan nuevos valores a todas las demás.

Sean las cantidades M, A, B, C y D, y supongamos que la primera M es directamente proporcional a A y C e inversamente proporcional a B y D; representemos por m_1 a_1 b_1 c_1 y d_1 , valores simultáneos de dichas cantidades y se desea saber el valor x de M, correspondiente a los a_2 b_2 c_2 d_2 de las otras cantidades de quienes depende.

$$m_1 \ldots a_1 \quad b_1 \quad c_1 \quad d_1$$
$$x \ldots a_2 \quad b_2 \quad c_2 \quad d_2$$

Se tiene (167)

$$\frac{x}{m_1} = \frac{a_2}{a_1} \times \frac{b_1}{b_2} \times \frac{c_2}{c_1} \times \frac{d_1}{d_2}.$$

de donde:

$$x = m_1 \times \frac{a_2}{a_1} \times \frac{b_1}{b_2} \times \frac{c_2}{c_1} \times \frac{d_1}{d_2}.$$

Luego: Se obtiene el valor de la incógnita multiplicando el valor conocido del mismo género que ella, por el producto de las razones de los nuevos valores a los antiguos, multiplicado por los de los antiguos a los nuevos, según que sean directa o inversamente proporcionales éstas con la incógnita

Ejemplo lo. Un depósito rectangular de mercurio, cuyas dimensiones son $2^m,5$ de largo, $0^m,90$ de ancho y $0^m,04$ de grueso, pesa 1224 kilogramos; se desea saber el peso de una barra de plata cuyas dimensiones son $1^m,5$ de largo, $0^m,45$ de ancho y $0^m,045$ de grueso.

$$1224 \text{ Kg.} \ldots 2^m,5 \ldots 0^m,90 \ldots 0^m,04 \ldots 13,6$$
$$x \text{ kg.} \ldots 1,5 \ldots 0,45 \ldots 0,045 \ldots 10,5$$

$$x \text{ kg} = 1224 \times \frac{1,5}{2,5} \times \frac{0,45}{0,9} \times \frac{0.045}{0,04} \times \frac{10,5}{13,6} =$$

$$1224 \times \frac{0,3189375}{1,224} = 318^{kg},93$$

Ejemplo 2o. Sabiendo que el peso del mercurio con relación al agua es 13,6, y que un depósito de este metal cuyas dimensiones son $2^m,5$ l, $0^m,90$ a, y $0^m,04$ p, pesa 1224 kilogramos, se desea saber el peso con relación al agua de la materia de una barra que pesa $318^{kg},93$ y cuyas dimensiones son

1m,5 l., 0m,45 a. y 0m,045 g.

	d	i	i	i	
1224 kg. ...	2m,5 ...	0m,9 ...	0m,04 ...	13,6	
318,93 kg. ...	1m,5 ...	0m,45...	0m,045 ...	x	

$$x = 13,6 \times \frac{318,93}{1224} \times \frac{1,5}{2,5} \times \frac{0,45}{0,9} \times \frac{0,045}{0,04} =$$

$$13,6 \times \frac{0,127572}{0,16524} = \frac{1,7349792}{0,16524} = 10,5 \text{ aproximado por exceso.}$$

EJERCICIOS

I. Un tren recorre 230 km. cada 5h. Cuántos kms. recorrerá en 23 horas.?

II. Para terminar una obra 4 obreros emplearon 9 horas, Cuanto tiempo emplearían 12 obreros ?.

III. Si un mecanógrafo cobra $1.00 por cada 100 cuartillas que escribe. Que cantidad se le pagará si ha de escribir 45 cuartillas.

IV. Si un tren recorre 46 km. 2Hm.6m. en 2horas 5 minutos, Cuanto tiempo tardaría en recorrer 500 kms.

✲ El mercurio pesa 13,6 veces mas que el agua destilada a 4° En igualdad de volumen la plata pesa 10,5 veces mas que el agua en las mismas condiciones; pesa pues 1dm³ de mercurio 13,5 kilogramos y de plata 10,5 kilogramos; las cantidades de peso que se relacionan son pues proporcionales a los números 13,6 y 10,5.

III. REGLA DE INTERES

173. Un capital prestado durante un cierto tiempo , se convierte en un capital mayor; el exceso de éste sobre aquél se llama interés.

El interés es una cantidad variable que depende del capital prestado, del tiempo durante el cual se presta, y del tanto por ciento a que se presta; tanto por ciento o rédito, es el interés de cien pesos en un año.

174.- Cuando el capital es invariable durante todo el tiempo que dura el préstamo, el interés se llama simple y es evidentemente proporcional al tiempo; pero si los intereses se acumulan al capital, al final de un cierto tiempo convenido, que suele ser un año, el capital es variable y ya no es el interés proporcional al tiempo; a esta clase de interés se llama compuesto.

Si c es el capital prestado, r el rédito o tanto por ciento y t el tiempo expresado en años, la determinación del interés que representamos por i es un caso particular de la regla de tres compuesta; porque en efecto, el interés es directamente proporcional al capital y al tiempo y se conoce un valor especial del interés que hemos llamado r, que corresponde al capital 100 pesos y al tiempo 1 año.

Se tendrá, pues:

r ...100...1
i ... c ...t

de donde:

$$i = r \times \frac{c}{100} \times \frac{t}{1} = \frac{c \cdot r \cdot t}{100} \qquad (1)$$

La fórmula (1) se ha obtenido, considerando que en la relación $\frac{t \text{ años}}{1 \text{ año}}$ la unidad, para medir el antecedente y el consecuente y sustituirla por la razón de los números correspondientes, ha sido el año; si fuese el mes, el denominador sería 12 meses = 1 año y el numerador m meses = t años; si tomásemos por unidad de tiempo el día, y llamamos d al número de días del tiempo t, como el año tiene 365 días, se podrá escribir:

$\underline{d}$ dias $= \underline{t}$ años, 1 año $=$ 365 días.

Es decir. $\frac{t}{1} = \frac{12}{m} = \frac{d}{365}$, son razones que tienen las tres el mismo valor.

Si el tiempo se expresa en meses, la fórmula (1) se transforma en esta otra:

$$i = \frac{c \cdot r \cdot m}{1200}$$

Y si se expresa en días, $i = \frac{c \cdot r \cdot d}{36500}$.

175. De la fórmula (1) se deduce, multiplicando por 100 sus dos miembros, esta otra:

$$100 \times i = c \times r \times t$$

y dividiendo los dos miembros de ésta, sucesivamente por $\underline{cr}$, $\underline{ct}$ y $\underline{rt}$, se hallarán los valores de $\underline{t}$, $\underline{r}$ y $\underline{c}$, respectivamente:

$$\frac{100 \times i}{cr} = t. \qquad \frac{100 \times i}{ct} = r \quad y \quad \frac{100 \times i}{rt} = c.$$

176. Puede resolverse con las cuatro cantidades que intervienen en el interés simple, cuatro problemas, que consisten en hallar una de dichas cantidades cuando se conocen las otras tres:

Problema 1o. Hallar $\underline{i}$ conociendo $\underline{c}$, $\underline{r}$ y $\underline{t}$.

Ejemplo: Cuál es el interés de 1500 pesos al 6% en 1 año y 4 meses ?

En este caso: $c = 1500$ pesos, $r = 6\%$ y $t = 16$ meses.

Aplicando la fórmula $i = \frac{1500 \times 6 \times 16}{1200}$, simplificando, para lo cual dividiremos el antecedente y consecuente por 100, por 6 y por 2, resulta:

$$i = \frac{15 \times 12}{1} = 120 \text{ pesos.}$$

Problema 2o. Hallar t conociendo c, i y r.

Ejemplo: Qué tiempo ha estado prestado un capital de 1500 pesos, que el 6% ha producido 120 pesos.?

Aplicando la fórmula, se tiene: $t = \frac{100 \times 120}{1500 \times 6}$; simplificando, para lo cual dividiremos los dos términos por 100, por 6 y por 5, resultará:

$$t = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3} \text{ año} = 1 \text{ año } 4 \text{ meses.}$$

Problema 3o. Hallar r conociendo c, i y t.

Ejemplo: A qué tanto por ciento se ha prestado un capital de 2500 pesos, que en 3 años y 2 meses se ha convertido en 3000 ?

El interés ha sido 500 pesos y aplicando la fórmula tendremos:

$$r = \frac{1200 \times 500}{2500 \times 38} = \frac{1200}{5 \times 38} = 6{,}32\% \text{ por exceso.}$$

Problema 4o. Hallar c conociendo i, r y t.

Ejemplo: Cuál es el capital que al 6,32%, en 3 años y 2 meses ha producido 500 pesos ?

Se tendrá: $c = \frac{1200 \times 500}{6{,}32 \times 38} = 2498{,}33.$

IV. INTERES COMPUESTO

177. Si llamamos ahora r_1 al interés anual de 1 peso, o lo que es lo mismo, si el tanto por 1 se designa por r_1 es evidente que 1 peso acumulado a su rédito durante un año, se habrá convertido en $1 + r_1$; este es el capital que se presta durante el segundo año, y por tanto producirá a interés simple $(1 + r_1) \times r_1$; sumando esta cantidad con $1 + r_1$ (capital al comenzar el segundo año), tendremos el capital que se ha de prestar durante el tercer año; se tiene, pues:

$$(1 + r_1) + (1 + r_1)r_1 = (1 + r_1)(1 + r_1) = (1 + r_1)^2.$$

Continuando del mismo modo, se verá que 1 peso acumulado a sus intereses se convierte al cabo de 3,4...n años respectivamente en $(1+r_1)^3$, $(1+r_1)^4$... $(1+r_1)^n$; luego el capital prestado que representaremos por c se convertirá en c veces esas cantidades al cabo de 1, 2, 3, etc., años; llamando, pues, C al capital compuesto a interés compuesto al tanto por uno r_1, en el número de años n, tendremos:

$$C = c\,(1+r_1)^n \quad (2).$$

Es evidente que el tanto por uno es la centésima parte del tanto por ciento; es decir, que $r_1 = \frac{r}{100}$.

Tambien es evidente que el interés compuesto es la diferencia entre C y c.

178. Con la fórmula (2) se pueden resolver cuatro problemas; aquí nos limitaremos a resolver sólo dos y aun en ellos las operaciones se complican grandemonte si el número de años es grande y r_1 tiene varias cifras decimales.

Problema 1o. Hallar C conociendo c, r_1 y n.

Ejemplo: Cuál es el capital formado a interés compuesto con 1200 pesos, al 6% en 3 años ?

Aplicando la fórmula:

$$C = c \times (1+r_1) = 1200 \times (1,06)^3 = 1429,22 \text{ por exceso}$$

De la fórmula (2) se deduce:

$$c = \frac{C}{(1+r_1)^n}$$

Problema 2o. Cuál fué el capital impuesto que se convirtió en 1429,22 pesos, al 6% en 3 años ?

$$c = 1200 \text{ pesos.}$$

INDICE

ARITMETICA RAZONADA

Pags.

LIBRO I

LA NUMERACION Y LAS OPERACIONES FUNDAMENTALES

LIBRO II

PROPIEDADES ELEMENTALES DE LOS NUMEROS NATURALES

LIBRO III

LAS FRACCIONES

LIBRO IV

LOS NUMEROS INCONMENSURABLES Y LAS RAICES EN GENERAL

LIBRO V

COMPARACION ARITMETICA Y PROPORCIONALIDAD